Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs $u = (1, 1, -2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (-1, m, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

★ **Exercice 2.** On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x - y, x + y, x - 3y)|(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Déterminer l'équation cartésienne de G et en déduire une description de $F \cap G$.

★ **Exercice 3.** On se place dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est il une combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Sujet 2.

★ **Exercice 2.** On considère le sous-espace vectoriel suivant :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x - y + z = 0\}.$$

Donner une base de S puis déterminer les coordonnées de $(3, 2, -1)$ dans cette base.

★ **Exercice 2.** On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $v = (1, 2, 4)$ dans la base $\mathcal{B}$.

★ **Exercice 3.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|x - z = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + t = 0\}$$

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** On considère les polynômes de $R[X]$ suivants :

$$P_0 = X^2 + X, \quad P_1 = X - 2 \quad \text{et} \quad P_2 = -X^2 + 1$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ou liée ?

★ **Exercice 2.** On considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$ dans $\mathbb{R}^4$. On pose $F = \text{Vect}\,(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}\,(x, y)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que x n'appartient pas à F.
2. En déduire les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

★ **Exercice 3.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y = 0 \right\},$$

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs $u = (1, 1, -2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (-1, m, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

★ **Exercice 2.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$$

★ **Exercice 3.** On se place dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est il une combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P_0 = X^2 + X, \quad P_1 = X - 2 \text{ et } P_2 = -X^2 + 1$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ou liée ?

★ **Exercice 2.** On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $v = (1, 2, 4)$ dans la base $\mathcal{B}$.

★ **Exercice 3.** On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \text{ et } G = \{(x - y, x + y, x - 3y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Déterminer l'équation cartésienne de G et en déduire une description de $F \cap G$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** On considère le sous-espace vectoriel suivant :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| x - y + z = 0\}.$$

Donner une base de S puis déterminer les coordonnées de $(3, 2, -1)$ dans cette base. -

★ **Exercice 2.** On considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$ dans $\mathbb{R}^4$. On pose $F = \text{Vect}\,(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}\,(x, y)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que x n'appartient pas à F.
2. En déduire les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

★ **Exercice 3.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y = 0\right\},$$

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Calculer les développements limités suivants :

$$a) \quad \frac{1}{1-x} - \exp(x) \text{ à l'ordre 3 en 0.} \qquad b) \quad \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \text{ à l'ordre 4 en 0.}$$

★ **Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire, puis déterminer une base de son noyau et son image.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques. L'application f est-elle injective ou surjective ?

★ **Exercice 3.** Soient $E = \mathbb{C}[X]$, p un entier naturel et f l'application de E dans E définie par

$$f(P) = (1 - pX)P + X^2 P'$$

Vérifier que f est une application linéaire. f est-elle injective ? Surjective ?

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Calculer les développements limités suivants :

$$a) \quad \sin(x)\cos(2x) \text{ à l'ordre 6 en 0.} \qquad b) \quad \frac{1}{1+x+x^2} \text{ à l'ordre 4 en 0.}$$

★ **Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire, puis déterminer une base de son noyau et son image.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques. L'application f est-elle injective ou surjective ?

★ **Exercice 3.** Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Calculer les développements limités suivants :

$$a) \quad (\ln(1+x))^2 \text{ à l'ordre 4 en 0.} \qquad b) \quad \tan(x) \text{ à l'ordre 5 en 0.}$$

★ **Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire, puis déterminer une base de son noyau et son image.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques. L'application f est-elle injective ou surjective ?

★ **Exercice 3.** Soient E l'e.v. des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $L : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe

$$L(f) : x \mapsto f(x) - f(-x).$$

Vérifier que f est un endomorphisme de E. L est-elle injective ? Surjective ?