Sujet 1.

★ **(Cours) Exercice 1.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $e^{ia}\, e^{ib} = e^{i(a+b)}$.

★ **Exercice 2.** On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.
2. Écrire z_3 sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

★ **Exercice 3.** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(x)$.

Sujet 2.

★ **(Cours) Exercice 1.** Soit z un nombre complexe. Démontrer que

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

★ **Exercice 2.** On cherche à résoudre l'équation (E) : $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$.

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai de (E).
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation.

★ **Exercice 3.** Résoudre l'équation différentielle suivante **sans** appliquer la variation de la constante :

$$\text{(E) : } y'(x) + y(x) = xe^{-x}$$

Sujet 3.

★ **Exercice 1.**

1. **(Cours)** Démonter la formule d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2. Linéariser l'expression suivante : $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

★ **Exercice 2.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Supposons que $|z| = 1$. Démontrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.
2. Supposons que $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$. Démontrer que z est de module 1. Qu'a-t-on alors démontré ?

★ **Exercice 3.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x$.