Lycée Jean Rostand - BCPST 1 Année 2023/2024

Khôlle de Mathématiques n° : 1

Programme : Logique et raisonnements.

Date : 19/09/2023 Colleuse : Victoria Callet

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Transcrire l'énoncé suivant en assertion logique puis en donner sa négation :

"La somme de deux éléments d'un ensemble E appartient encore à E."

★ **Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

★ **Exercice 3.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$.

★ **Exercice 4.** Soient a, b et c des réels. Donner la condition pour que la somme suivante soit bien définie, puis la calculer :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

★ **Exercice 5.** Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 e^{-x} - 1$.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Donner la négation de l'assertion suivante : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

★ **Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 1.$$

★ **Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante : $\frac{x}{x-1} \geq \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$.

★ **Exercice 5.** Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Donner la négation de l'assertion suivante : $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in R$, $f(x) \leq M$.

★ **Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montre que si n^2 est impair, alors n est impair.

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n}{n+3}.$$

★ **Exercice 4.**

1. Déterminer les racines du polynôme suivant : $P = X^3 - 13X + 12$.
2. Étudier le signe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^3 - 13x + 12$.

★ **Exercice 5.** Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Démontrer que pour tout entier relatif n, le quotient $\frac{n(n^2+1)}{n}$ est un entier.

★ **Exercice 2.** Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2 \times 3^n + (-2)^n$.

★ **Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante :

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}.$$

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Démontrer que pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $x^2 \leq 1$.

★ **Exercice 2.** Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

★ **Exercice 4.**

1. Déterminer les racines du polynôme suivant : $P = X^3 - 13X + 12$.
2. Étudier le signe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^3 - 13x + 12$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Démontrer que pour tout entier relatif n, le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

★ **Exercice 2.** Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq n^2$.

★ **Exercice 4.** Soient a, b et c des réels. On pose S la somme définie par

$$S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

Déterminer une condition sur les réels a, b et c pour laquelle S est bien définie, puis calculer S.

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

★ **Exercice 2.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x}}$.

1. Donner le domaine de définition de f, puis déterminer ses limites en 0 et $\pm\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f, puis déterminer les asymptotes de f et tracer son graphe.

★ **Exercice 3.** Soit A une partie non-vide **bornée** de $\mathbb{R}$. On considère la partie B de $\mathbb{R}$ définie par

$$B = \left\{|x-y| \text{ avec } (x,y) \in A^2\right\}$$

1. Démontrer que B est majorée. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de B.
2. Démontrer que $\delta(A) \leq \sup(A) - \inf(A)$, puis en déduire que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose A la partie non vide de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \left\{a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

A est-elle majorée, minorée ? Si oui, déterminer ses bornes supérieures, inférieures.

★ **Exercice 2.** Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

★ **Exercice 3.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2. Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1** Calculer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x} \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to 0+} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

★ **Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + nT) = f(x)$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est constante.

★ **Exercice 3.** Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Supposons que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

1. Démontrer que A est majorée puis que B est minorée.
2. Démontrer que $\sup A \leq \inf B$.

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n} (k-2)(k+1) \qquad\qquad b) \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

★ **Exercice 2.** Démontrer par une étude de fonction l'inégalité suivante :

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^x \geq 1.$$

★ **Exercice 3.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n.$$

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = 1$.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Étudier les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

★ **Exercice 2.** Calculer la somme et le produit suivant :

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \qquad\qquad b) \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

★ **Exercice 3.** Soient n et p des entiers naturels tels que $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

★ **Exercice 2.** Calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$

★ **Exercice 3.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2. Plus généralement, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$