Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$.
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

★ **Exercice 2.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$

Calculer B^n pour tout $n \in N$, puis en déduire A^n.

★ **Exercice 3.** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = 3 + 4i$. En déduire les racines carrés de $3 + 4i$.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

★ **Exercice 2.** Déterminer selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + y - z & = & 1 \\ 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \end{cases}$$

★ **Exercice 3.** On pose $P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i$.

1. Calculer $P(-1 - i)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \geq 1$.

★ **Exercice 2.** Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 3.** Déterminer selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + my & = & -3 \\ mx + 4y & = & 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat peut-on faire ?

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 2.** Dire dans chaque cas si les vecteurs sont coplanaires :

1. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$
2. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, -2-, 3)$

★ **Exercice 3.** Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique telle que $u_6 = 112$ et $u_{14} = 56$. Déterminer u_n en fonction de n, puis calculer le 15ième terme de cette suite. La suite $(u_n)_n$ est-elle croissante ?

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.
2. Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et donner l'expression de son terme général.
3. Etudier la convergence de $(u_n)_n$.

★ **Exercice 2.** Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

★ **Exercice 3.** On considère les deux vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -1, -1)$ et $v = (2, -1, 2)$. Trouver un vecteur w tel que u, v et w soient coplanaires.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** On considère les deux vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^2$: $u = (1, 2)$ et $v = (3, 5)$. Montrer que $\{u, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis calculer les coordonnées de $w = (2, 3)$ dans cette base.

★ **Exercice 2.** Ecrire le système suivant sous forme matricielle, déterminer l'inverse de la matrice associée et en déduire l'ensemble des solutions la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= m \end{cases}$$

★ **Exercice 3.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par

$$u_0 = 4, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 3$$

1. Déterminer la nature des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
2. Déterminer l'expression générale de (v_n) en fonction de n, puis de même pour u_n.
3. Calculer la somme des 11 premiers termes de u_n.