Sujet 1.

★ **Exercice 1. (Cours)** Démontrer que si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

★ **Exercice 2.** On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X > k + n | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que X est sans mémoire.
2. Soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
   (a) Démontrer que $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

★ **Exercice 3.** Une certaine maladie affectue une personne sur mille. On dispose d'un tes pour détecter cette maladie. Le test est effectif pour 99% des personnes effecivement malades mais est également positif pour 0,2% des personnes saines.

1. Traduire les données en termes de probabilités et faire un arbre de la situation.
2. Quelle est la probabilité d'être en bonne santé lorsque le test est négatif ?
3. Quelle est la probabilité d'être malade lorsque le test est négatif ?

Sujet 2.

★ **Exercice 1. (Cours)** Démontrer que si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

★ **Exercice 2.** Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée à l'événement $(X = n)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de Y.

★ **Exercice 3.** On considère une pièce non équilibrée : à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3 et d'obtenir face est 1/3. On lance n fois la pièce, et les lancés sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la première fois. On note p_n la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$ et déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que $p_n = \frac{2}{3}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$ pour tout $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.

Sujet 3.

★ **Exercice 1. (Cours)** Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{lk=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

★ **Exercice 2.** Soit X une variabale aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p\,\mathbb{P}(X \geq n)$. Déterminer la loi de X.

★ **Exercice 3.** On tire un jeu de 52 cartes. Quelles sont les probabilités d'obtenir :

i) un brelan ; *ii)* une couleur ; *iii)* une paire ;
iv) une suite ; *v)* une suite couleur ; *vi)* rien ;

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{lk=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

★ **Exercice 2.** Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer toutes les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième. Factoriser P sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$.

★ **Exercice 3.** On tire un jeu de 52 cartes. Quelles sont les probabilités d'obtenir :

i) un brelan ; *ii*) une couleur ; *iii*) une paire ;
iv) une suite ; *v*) une suite couleur ; *vi*) rien ;

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations suivantes :

$$i)\quad P(X^2) = (X^2+1)P(X) \qquad ii)\quad P \circ P = P$$

★ **Exercice 2.** On considère une pièce non équilibrée : à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3 et d'obtenir face est 1/3. On lance n fois la pièce, et les lancés sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la première fois. On note p_n la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$ et déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que $p_n = \dfrac{2}{9}p_{n-2} + \dfrac{1}{3}p_{n-1}$ pour tout $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Démontrer que si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

★ **Exercice 2.** Soient $n \geq 1$ et $P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$. Vérifier que 2 est racine de P puis déterminer son ordre de multiplicité.

★ **Exercice 3.** Une certaine maladie affectue une personne sur mille. On dispose d'un tes pour détecter cette maladie. Le test est effectif pour 99% des personnes effecivement malades mais est également positif pour 0,2% des personnes saines.

1. Traduire les données en termes de probabilités et faire un arbre de la situation.
2. Quelle est la probabilité d'être en bonne santé lorsque le test est négatif ?
3. Quelle est la probabilité d'être malade lorsque le test est positif ?