Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Dire dans chaque cas si les vecteurs sont coplanaires :

1. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$
2. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$

★ **Exercice 2.** Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui correspondent à l'unique plan P passant par les 3 points $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 4)$ et $C(2, 2, -1)$.

$$3x - 2y + z - 1 = 0 \quad ; \quad 2x + z - 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - s + 3t \\ y & = & 1 + 2y \\ z & = & 3s - 5t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - s \\ y & = & -1 + 2t \\ z & = & 2s \end{array} \right.$$

★ **Exercice 3.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Quelle est la seule limite possible l de la suite (u_n) ?
2. Soit $v_n = u_n - l$. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géometrique et en déduire la nature de $(u_n)_n$.
3. On considère un carré de côté 1 que l'on partage en 9 carrés égaux, puis on colorie le carré central. Pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** On considère les deux vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -1, -1)$ et $v = (2, -1, 2)$. Trouver un vecteur w tel que u, v et w soient coplanaires.

★ **Exercice 2.** On considère les trois points $A(-1, 1, 2)$, $B(0, 0, 1)$ et $C(0, -1, -2)$.

1. Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés, puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit M le point de coordonnées $(8, 10, 5)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par M et orthogonale au plan (ABC).
3. Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de d et de (ABC).

★ **Exercice 3.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par $u_0 = 4$, $\quad u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $v_n = u_n - 3$.

1. Déterminer la nature des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
2. Déterminer l'expression générale de (v_n) en fonction de n, puis de même pour u_n.
3. Calculer la somme des 11 premiers termes de u_n.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** On considère les deux vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^2$: $u = (1, 2)$ et $v = (3, 5)$. Montrer que $\{u, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis calculer les coordonnées de $w = (2, 3)$ dans cette base.

★ **Exercice 2.** On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2 + t \\ y & = & 2 - t \\ z & = & 1 + 4t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3 + t \\ y & = & -2 + 3t \\ z & = & 1 + t \end{array} \right.$$

Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

★ **Exercice 3.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par $u_0 = 3$, $\quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ et $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.
2. Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et donner l'expression de son terme général.
3. Etudier la convergence de $(u_n)_n$.

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Étudier la nature des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \quad ; \quad u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}.$$

★ **Exercice 2.** On considère la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) \ \text{ avec } \ f(x) = x^2 + \frac{3}{16} \ \text{ et } \ u_0 \geq 0.$$

1. Etudier f et le signe de $f(x) - x$. En déduire les limites possibles pour $(u_n)_n$.
2. On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$. Montrer que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout n puis que $(u_n)_n$ est croissante. En déduire sa nature et sa limite.
3. On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante et minorée. En déduire sa nature et sa limite.
4. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante. En déduire sa nature et sa limite.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$, et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que $u_n \geq 1$ pour tout n.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
3. Démontrer que $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

★ **Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que H_n est croissante puis en déduire que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Étudier la nature des suites suivantes

$$u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$$

★ **Exercice 2.** Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \ln u_n.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n-1)}{12n^3} \leq v_n \leq \dfrac{n+1}{2n}$.
3. Montrer que $(v_n)_n$ converge et préciser sa limite.
4. Montrer que $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** Étudier la limite des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \quad ; \quad u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}.$$

★ **Exercice 2.** On considère la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = x^2 + \frac{3}{16} \text{ et } u_0 \geq 0.$$

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. En déduire les limites possibles pour $(u_n)_n$.
2. On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$. Montrer que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout n puis que $(u_n)_n$ est croissante. En déduire sa nature et sa limite.
3. On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Déterminer la nature de $(u_n)_n$ et sa limite.
4. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$. Déterminer la nature de $(u_n)_n$ et sa limite.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$, et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que $u_n \geq 1$ pour tout n.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty|$.
3. Démontrer que $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

★ **Exercice 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que H_n est croissante puis en déduire que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

★ **Exercice 3.** Étudier la limite de la suite suivante : $u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n}$.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \ln u_n.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n-1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$.
3. Montrer que $(v_n)_n$ converge et préciser sa limite. Faire de même pour $(u_n)_n$.

★ **Exercice 2.** Étudier la limite des suites suivantes

$$u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$$

Sujet 1.

★ **Exercice 1.** On considère la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16} \quad \text{et} \quad u_0 \geq 0.$$

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. En déduire les limites possibles pour $(u_n)_n$.
2. On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$. Montrer que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout n puis que $(u_n)_n$ est croissante. En déduire sa nature et sa limite.
3. On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Déterminer la nature de $(u_n)_n$ et sa limite.
4. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$. Déterminer la nature de $(u_n)_n$ et sa limite.

★ **Exercice 2.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$, où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Sujet 2.

★ **Exercice 1.** Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

★ **Exercice 2.** On considère la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}^*.$$

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$. Montrer que I est stable par f et qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
2. Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$ et en déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

Sujet 3.

★ **Exercice 1.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sinh\left(\dfrac{1}{x}\right)$, où $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Étudier la parité de f et en déduire le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\tanh(x) \leq x$. En déduire le tableau de variations de f puis tracer la courbe représentative de f.

★ **Exercice 2.** Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) - e^x \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{\sqrt{x}} \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \ ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$