

MATHÉMATIQUES POUR LES
ARCHITECTES ET INGÉNIEUR·E·S
AI3

VICTORIA CALLET-FELTZ
victoria.callet@insa-strasbourg.fr

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

TABLE DES MATIÈRES

Plan du cours et prérequis	5
1 Équations différentielles	7
1.1 Introduction et motivations	7
1.2 Équations différentielles	8
1.2.1 Généralités	8
1.2.2 Résolutions explicites	9
1.3 Exercices	12
2 Séries numériques et séries entières	13
2.1 Séries numériques	13
2.1.1 Définitions et exemples	13
2.1.2 Convergence d'une série	14
2.2 Séries entières	16
2.2.1 Convergence d'une série entière	16
2.2.2 Régularité de la somme	17
2.2.3 Fonctions développables en séries entières	18
2.3 Exercices	19
3 Séries de Fourier	21
3.1 Introduction et motivations	21
3.2 Séries de Fourier	22
3.2.1 Définitions et premières propriétés	22
3.2.2 Convergence des séries de Fourier	25
3.2.3 Analyse spectrale	27
3.3 Étude d'une fonction 2π -périodique	29
3.4 Exercices	33
4 Équations des ondes et de la chaleur	35
4.1 L'équation des ondes	35
4.1.1 Présentation du problème	35
4.1.2 Recherche des solutions stationnaires	36
4.1.3 Solution générale du problème	39

4.1.4	Conditions initiales et solutions particulières	40
4.1.5	Application : corde frappée	42
4.2	L'équation de la chaleur	44
4.2.1	Présentation du problème	44
4.2.2	Résolution	44
4.2.3	Application : porte de réfrigérateur	47
4.3	Exercices	49

PLAN DU COURS ET PRÉREQUIS

PRÉREQUIS

- Analyse réelle première année (continuité, dérivabilité, suites numériques).
- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.
- Calcul d'intégrales.
- Nombres complexes.
- Notion de fonctions à plusieurs variables, dérivées partielles.

OBJECTIFS

- Maîtriser les outils mathématiques intervenant dans certaines résolutions d'équations aux dérivées partielles.
- Être capable de mettre en place un raisonnement scientifique rigoureux, de mobiliser les ressources d'un large champ de sciences fondamentales.
- Formaliser et résoudre un problème à l'aide d'outils analytiques ou numériques.
- Identifier et exploiter les interactions entre des champs de sciences fondamentales connexes.
- Être capable de transposer les connaissances scientifiques dans le domaine de la spécialité.



Total coefficients : 2

Total heures : 18 séances d'1h30 (12 cours, 4 TD et 2 examens), pour un total de 27h.

Total heures travail personnel : 30h.

CHAPTER 1.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.1. INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

La plupart des problèmes physiques se modélisent mathématiquement avec des équations différentielles : les exemples les plus courants sont le principe fondamental de la dynamique, la mécanique des fluides, etc. Dans ce cours, nous serons motivés par deux problèmes physiques célèbres : **l'équation des cordes vibrantes** et **l'équation de la chaleur**.

Dans le premier cas, on fait vibrer une corde fixée aux deux extrémités, et l'évolution de la hauteur de la corde en chaque point est modélisée grâce à l'équation des ondes (1.1), où $\nu^2 = \frac{T_0}{m}$, m désignant la masse de la corde et T_0 sa tension.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

Si des contraintes sont ajoutées au problème (conditions au bord, interactions avec l'extérieur, degré de précision du modèle, etc.), cette équation peut se compliquer et d'autres termes peuvent apparaître. Elle permet cependant de modéliser un grand nombre de problèmes vibratoires.

Le second problème est celui qui permet de modéliser l'évolution de la température dans une tige uniforme, via l'équation de la chaleur (1.2), où c désigne le coefficient de diffusion thermique de la tige.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

L'étude des équations (1.1) et (1.2) fera l'objet du chapitre 4. Pour comprendre comment résoudre ces deux équations, nous avons besoin de faire des rappels de résolution d'équations différentielles. En général, de telles équations sont très difficiles à résoudre, et n'admettent pas forcément de solutions exprimables à l'aide de fonctions usuelles. Les cas qui nous intéressent ici sont les équations linéaires d'ordre 1 et 2, pour lesquelles il existe des méthodes de résolution.

1.2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.2.1. GÉNÉRALITÉS

Définition 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une fonction f continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R} , où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe. Une **équation différentielle d'ordre n** est une équation de la forme

$$y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.3)$$

où $y = y(t)$ est une fonction inconnue. On dit que y est une **solution de l'équation (1.3)** si y est de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle $J \subset I$ tel que $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ et que $y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ pour tout $t \in J \subset I$.

Il existe bien entendu un grand nombre de « type » d'équations différentielles, le cas le plus simple étant celui des équations linéaires : s'il existe $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ et $b(t)$ des fonctions telles que

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \quad (1.4)$$

on dit alors que l'équation est **différentielle linéaire d'ordre n** à coefficients variables non-homogènes. Lorsque $b(t) = 0$ pour tout t , l'équation est dite **homogène**. Si de plus les fonctions a_i sont indépendantes de t , on dit que l'équation est **à coefficients constants**. Par exemple, l'équation $y'(t) = \sin(t)y(t)$ est linéaire, tandis que l'équation $y'(t) = \cos(y(t))$ ne l'est pas.

Exemple 1 (Pendule simple). On cherche à déterminer l'angle θ en fonction du temps t (figure 1.1). En posant $\omega^2 = \frac{g}{l}$ et en appliquant le principe fondamental de la dynamique (la somme des forces qui s'exerce sur un système est égale à la somme de la masse et de l'accélération), on est amené à résoudre l'équation différentielle homogène d'ordre 2 suivante :

$$\theta''(t) + \omega^2 \sin(\theta) = 0.$$

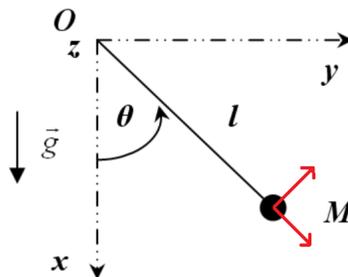


FIGURE 1.1 – Un pendule simple.

Pour résoudre explicitement des équations différentielles linéaires, on se base sur le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.1

Soit (E) une équation linéaire d'ordre n :

$$(E) : a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

On note (E_0) l'équation homogène associée :

$$(E_0) : a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

Alors, sur tout intervalle où $a_n(t) \neq 0$, l'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension n , que l'on note S_0 . De plus, si y_p est une solution particulière de (E) , alors l'ensemble des solutions de (E) est donné par l'ensemble

$$S = \{y_0 + y_p \mid y_0 \in S_0\}.$$

1.2.2. RÉOLUTIONS EXPLICITES

Cette section constitue un rappel des méthodes de résolutions explicites de certaines équations différentielles linéaires (ordres 1 et 2).

★ ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où $n = 1$. L'équation (1.4) devient alors

$$(E) : a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = b(t) \tag{1.5}$$

Supposons qu'on ait deux solutions y et \bar{y} : alors, on aurait

$$\begin{cases} a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = b(t) \\ a_1(t)\bar{y}'(t) + a_2(t)\bar{y}(t) = b(t) \end{cases}$$

En particulier, lorsque $a_1 \neq 0$, on a

$$(y(t) - \bar{y}(t))' = \frac{a_2(t)}{a_1(t)}(y(t) - \bar{y}(t))$$

soit $y_0 = y - \bar{y}$ est solution de l'équation homogène $z'(t) = \frac{a_2(t)}{a_1(t)}z(t)$. Réciproquement, si \bar{y} est une solution particulière de (1.5), alors toutes les solutions de l'équation non-homogène sont données par

$$y = \bar{y} + y_0$$

où y_0 est solution de l'équation homogène. Ainsi, pour résoudre explicitement (1.5), on applique la méthode suivante :

- 1) On commence par résoudre l'**équation homogène** associée :

$$(E_0) : a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = 0 \quad (1.6)$$

Supposons $a_1 \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors, on a

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{a_2(t)}{a_1(t)} \quad \text{et donc} \quad (\ln(|y(t)|))' = -\frac{a_2(t)}{a_1(t)}.$$

Ainsi, on obtient une solution de l'équation homogène (E_0) donnée par

$$y_0(t) = \lambda \exp\left(-\int \frac{a_2(t)}{a_1(t)}\right), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, on a $y_0(t) = \lambda \exp(A(t))$, où A est une primitive de $\frac{a_2}{a_1}$ et où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 2) On cherche une solution particulière à l'équation générale (E). Pour cela, on étudie le second membre : si $b(t)$ est d'une forme particulière (polynôme, exponentielle, fonction trigonométrique), alors on cherchera une solution particulière de cette forme, c'est à dire en posant y_p et en identifiant dans l'équation.

Dans des cas plus complexes (mais qui fonctionne aussi de façon générale), on utilise la méthode dite de **la variation de la constante** : on reprend la solution homogène y_0 trouvée à l'étape 1) et on remplace la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ par une fonction fonction $\lambda : t \mapsto \lambda(t)$. On pose alors une solution particulière :

$$y_p(t) = \lambda(t) \exp(-A(t))$$

Alors, $y_p'(t) = \lambda'(t) \exp(-A(t)) - \lambda(t) \frac{a_2(t)}{a_1(t)} \exp(-A(t))$ et, en réinjectant dans l'équation (E), on obtient simplement

$$\lambda'(t) = b(t) \exp(-A(t)),$$

soit

$$\lambda(t) = \int b(t) \exp(-A(t))$$

On obtient ainsi une expression de notre solution particulière y_p .

- 3) Finalement, l'**ensemble des solutions** de l'équation générale (E) est donné par

$$S_{(E)} = \left\{ \lambda \exp\left(-\int A(t)\right) + \int b(t) \exp(-A(t)) \exp(-A(t)) \right. \\ \left. \mid \lambda \in \mathbb{R}, A(t) \text{ primitive de } \frac{a_2(t)}{a_1(t)}, a_1(t) \neq 0 \right\}.$$

★ ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

On se place maintenant dans le cas où $n = 2$, et on fait l'hypothèse supplémentaire que les fonctions a_i ne dépendent pas de t (autrement dit, les a_i sont tous constants). L'équation (1.4) devient alors une équation linéaire de degré 2 à coefficients constants :

$$(E) : a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = b(t), \quad \text{avec } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation (E) , la méthode est la même que dans le cas précédent, à savoir qu'on commence par chercher une solution homogène, puis une solution particulière. Notons (E_0) l'équation homogène associée :

$$(E_0) : a_1 y''(t) + a_2 y'(t) + a_3 y(t) = 0.$$

Posons maintenant $y_0(t) = e^{\lambda t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, en injectant dans (E_0) on obtient

$$(\lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3) e^{\lambda t} = 0$$

donc $y_0(t)$ est une solution de (E_0) si et seulement si λ est racine du polynôme

$$\chi(X) = a_1 X^2 + a_2 X + a_3.$$

Notons r_1 et r_2 les racines de ce polynôme. Alors, l'ensemble des solutions S_0 de (E_0) est donné respectivement par :

- $S_0 = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ si $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ (**deux racines simples réelles**).
- $S_0 = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu t e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ si $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ (**une racine double**).
- $S_0 = \{e^{\alpha t} (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \bar{r}_1$ (**deux racines complexes**).

Il s'agit ensuite de trouver une solution particulière de (E) . Pour cela, on n'utilise pas la méthode de la variation de la constante, qui est plus compliquée à l'ordre 2. En revanche, lorsque le second membre $b(t)$ a une forme simple (polynôme, exponentielle, fonction trigonométrique), on cherche une solution particulière **de la même forme**, comme il est possible de le faire à l'ordre 1. Par exemple, si le second membre est donné par $b(t) = t e^{3t}$, on pose $y_p(t) = P(t) e^{3t}$, avec P un polynôme, puis on injecte dans (E) pour trouver le degré de P et ses coefficients.

Les solutions générales de l'équation (E) sont alors données par

$$S_{(E)} = \{y_0 + y_p \mid y_0 \in S_0\}.$$

1.3. EXERCICES

★ **Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) - 2y(t) = \cos(t)$

5. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2$

2. $y'(t) - 2ty(t) = t$

6. $y''(t) + y(t) = t^2 + 2$

3. $t^2y'(t) - y(t) = \frac{1}{t}$

7. $y''(t) - y(t) = e^{2t} - e^t$

4. $y'(t) + y(t) = te^{-t}$

8. $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \sin(\omega t)$, avec ω et ω_0^2 deux constantes strictement positives.

★ **Exercice 2. Refroidissement d'un corps.**

On plonge un corps (assimilé à un point) initialement à température T_0 dans un milieu à température constante T_m . Les travaux de Newton fournissent une description de l'évolution de la température du corps au cours du temps : la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence de température entre le milieu et le corps lui-même.

Traduire cette loi avec une équation différentielle puis déterminer la température du corps au cours du temps.

★ **Exercice 3. Tour à pression constante.**

On considère une tour obtenue en faisant tourner une fonction f autour d'un axe vertical. Sa surface est donc paramétrée par

$$\psi(\theta, z) = (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z), \quad z \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Sur chaque niveau horizontal de la tour s'exerce une pression liée à la masse de la partie supérieure de la tour. Si on suppose la tour homogène (c'est à dire de construction uniforme), alors la pression au niveau z_0 est proportionnelle à $\frac{V_{z_0}}{A_{z_0}}$ où V_{z_0} est le volume de la partie supérieure et A_{z_0} l'aire du niveau z_0 . On souhaite déterminer une fonction f de manière à ce que la pression qui s'exerce sur chaque niveau soit la même.

1. Exprimer la pression $P(z)$ à l'altitude z à l'aide de la fonction f et d'une intégrale.
2. Montrer que si la tour est à pression constante, alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. Résoudre cette équation et conclure.

CHAPTER 2.

SÉRIES NUMÉRIQUES ET SÉRIES ENTIÈRES

Motivations : On peut résoudre un certain nombre d'équations différentielles en injectant des solutions sous la forme de séries numériques ou séries de fonctions. Si ces objets mathématiques mériteraient un cours à part entière, l'objectif de ce chapitre est essentiellement de définir les notions et propriétés élémentaires relatives aux séries, et d'être capable de les utiliser dans le cadre de la résolution d'équations différentielles et de problèmes concrets.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne le corps des réels \mathbb{R} ou celui des complexes \mathbb{C} .

2.1. SÉRIES NUMÉRIQUES

2.1.1. DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 2.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{K} . On appelle **série numérique** de terme général u_n la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ avec

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

On note $\sum_n u_n$ cette série.

Une série est une suite particulière : on peut donc parler de convergence et de limites. Plus précisément, si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente, on dit que la série $\sum_n u_n$ est **convergente** et on note alors

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

la limite de cette suite, que l'on appelle **somme de la série** $\sum_n u_n$. De même, si $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum_n u_n$ est **divergente**. Enfin, si la série converge, la différence

$$R_N = S - S_N$$

est appelée **reste d'ordre N de la série** $\sum_n u_n$. On note $R = (R_N)_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des restes de la série.

Exemple 2. (Série géométrique)

Soit $(u_n)_n$ la suite donnée par $u_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. La série $\sum_n u_n$ est donnée par la suite des sommes partielles S_N , avec

$$S_N = \sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

- Si $|q| < 1$, la suite des S_N converge et $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - q}$. Ainsi la série converge et son reste d'ordre N est donné par $R_N = \frac{1}{1 - q} - \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{q^{N+1}}{1 - q} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $|q| > 1$, alors $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc la série diverge.

2.1.2. CONVERGENCE D'UNE SÉRIE

On commence par deux résultats essentiels.

Proposition 2.1

1. Si $\sum_n u_n$ converge, le terme général u_n et le reste R_N tendent vers 0.
2. Si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.

La première proposition est très utile lorsqu'on souhaite démontrer qu'une série ne converge pas : en effet, il suffit alors de montrer que son terme général ne tend pas vers 0. Par exemple, la série $\sum_n n$ est divergente, puisque son terme général $u_n = n$ ne tend pas vers 0. En revanche, la réciproque est fautive, et le contre-exemple classique est le suivant : la **série harmonique** $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, pourtant on a bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Le deuxième résultat est un critère de **convergence absolue** : si la série en valeur absolue converge, alors la série converge. Dans la théorie, ce critère justifie la restriction à l'étude des séries aux séries à termes positifs (c'est à dire dont le terme général u_n est toujours positif).

Proposition 2.2 (Critères pour les séries à termes positifs)

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs (i.e. $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. (*Majoration des sommes partielles*)

$\sum_n u_n$ est convergente ssi il existe $M > 0$ tel que $S_N \leq M$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2. (*Critère de comparaison.*)

Soit $\sum_n v_n$ une série à termes positifs telle que pour tout n , $u_n \leq v_n$. Alors, si $\sum_n v_n$ converge, $\sum_n u_n$ converge et si $\sum_n u_n$ diverge, $\sum_n v_n$

Enfin, voici quelques exemples de références qui reviendront fréquemment dans ce cours : il est utile de les retenir.

♥ (Exemples de séries à retenir)

★ La série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente.

★ La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente et sa somme est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★ La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, et sa somme est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$.

★ La série $\sum_n x^n$ converge ssi $x \in]-1, 1[$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

★ La série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x$.

Remarque. Le reste d'une série numérique permet de mesurer sa **vitesse de convergence**, c'est à dire l'erreur commise en tronquant la série. Par exemple, si $|x| < 1$, le reste de la série $\sum_n x^n$ est donnée par

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

Ainsi, la vitesse de convergence de la série vers sa limite $\frac{1}{1-x}$ est en x^N , ce qui est une convergence rapide (c'est une vitesse exponentielle, $x^N = \exp N \ln(x)$). De même, en appliquant une comparaison série/intégrale, on peut déterminer un équivalent simple du reste R_N de la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$:

$$R_N \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{N-1}$$

C'est donc une convergence assez lente : pour obtenir une précision de l'ordre de 10^{-2} sur la limite, il faut sommer les 101 premiers termes de la série :

$$\sum_{n=1}^{101} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \pm 0.01$$

2.2. SÉRIES ENTIÈRES

A la fin de la section précédente, certaine série possède un terme général u_n dépendant d'un paramètre x . On parle dans ce cas de **série de fonctions**. Dans ce cas, on peut étudier la fonction associée

$$x \mapsto \sum_n u_n(x).$$

Il existe différents types de séries de fonctions. Dans ce cours, nous étudierons essentiellement les séries **entières** et les séries **trigonométriques** (aussi appelées **séries de Fourier**), qui sont toutes deux très utiles dans la résolution de certaines équations différentielles. Le paragraphe suivant est dédié aux séries entières, pour lesquelles nous énoncerons des généralités et quelques critères de convergence simples. Les séries de Fourier feront quant à elles l'objet du chapitre 3.

2.2.1. CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Définition 2.2

Une **série entière** est une série de la forme $\sum_n a_n x^n$, où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé. On appelle **rayon de convergence** de $\sum_n a_n x^n$:

$$R = \sup \{r \geq 0 \text{ tel que } (|a_n| r^n) \in \mathbb{N} \text{ est bornée}\} \cup \{+\infty\}$$

Le rayon de convergence permet d'étudier la convergence des séries entières. Il existe des critères pour le calculer, mais nous n'entrerons pas dans les détails ici. Le théorème suivant énonce le critère de convergence général pour une série entière.

Théorème 2.1

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- Si $|x| < R$, alors $\sum_n a_n x^n$ converge absolument (i.e. $\sum_n |a_n| |x|^n$ est convergente).
- Si $|x| > R$, alors $\sum_n a_n x^n$ diverge.
- Si $|x| = R$, alors on ne peut pas conclure en général.

2.2.2. RÉGULARITÉ DE LA SOMME

L'étude des séries entières conduit naturellement à l'étude de la fonction associée $x \mapsto \sum_n a_n x^n$, et plus précisément aux propriétés de la somme de la série

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Le théorème suivant énonce les conditions de continuité et de dérivabilité pour ce type de fonction, qui dépendent essentiellement du rayon de convergence de la série.

Théorème 2.2 (Continuité, dérivabilité et intégration des séries entières)

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, on sait que cette série converge pour tout $x \in]-R, R[$. De plus, on a

1. La somme S est **continue** sur $] - R, R[$.
2. La somme S est de **classe** \mathcal{C}^1 sur $] - R, R[$, et sa **dérivée** est donnée par :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Par récurrence, la somme S est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - R, R[$ et pour tout k , on a

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

3. La **primitive** de S sur $] - R, R[$ qui s'annule en 0 est la somme de sa série primitive :

$$\forall x \in] - R, R[, \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

2.2.3. FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIES ENTIÈRES

Certaines fonctions usuelles peuvent s'écrire comme somme d'une série entière, selon le rayon de convergence de celle-ci :

$$\forall x \in] - R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit que f est **développable en série entière**. Le formulaire suivant fournit une liste des développements de fonctions usuelles classiques en séries entières.

♥ (Développement en séries entières des fonctions usuelles)

★ Les séries entières suivantes ont un rayon de convergence $R = +\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: ★ Les séries entières suivantes ont un rayon de convergence $R = 1$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$:

- $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

- $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

- $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

2.3. EXERCICES

★ **Exercice 4.** On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$. Le but de l'exercice est de chercher une solution sous la forme d'une série entière.

1. Soit y une fonction s'écrivant sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Injecter y dans l'équation et déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n .
2. Déterminer ainsi la solution qui satisfait la condition $y(0) = 1$.

★ **Exercice 5.** En imitant l'exercice précédent, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) = 2xy(x) + x$
2. $y(x) - x^2y'(x) = x$
3. $xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}$

Indications : pour la dernière, penser à développer $\frac{1}{1+x}$ en série entière.

★ **Exercice 6.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

Déterminer une solution y sous forme de série entière satisfaisant la condition $y(0) = 1$.
Ce type d'équation est appelé **équation différentielle de Bessel**.

CHAPTER 3.

SÉRIES DE FOURIER

3.1. INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Les **séries de Fourier**, parfois appelées **séries trigonométriques**, sont des séries de fonctions de la forme

$$\sum_n a_n(x) \cos(nx) + b_n(x) \sin(nx)$$

ou encore

$$\sum_n c_n(x) e^{inx}.$$

Historiquement, la théorie des séries de Fourier a été développée pour la résolution de l'équation de la chaleur, et s'est révélée par la suite précieuse pour l'étude de phénomène périodiques. Par exemple, en mécanique, les séries de Fourier permettent entre autres d'analyser les vibrations ou les oscillations d'un système.

Dans tout ce chapitre on travaillera avec des fonctions dites **périodiques**, c'est à dire des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

On dit que T est la **période** de f , ou encore, que f est **T -périodique**. Dans les meilleurs cas, une telle fonction admet une décomposition en série de Fourier, c'est à dire en somme de fonctions sinusoïdales, comme l'illustre la figure 3.1.

Par ailleurs, rappelons que les fonctions \cos et \sin forment une base de l'espace vectoriel des fonctions périodiques, et que décomposer une fonction f en série trigonométrique revient donc à chercher ses coordonnées dans cette base. Ces coordonnées sont les **fréquences** de f . Le problème peut donc être vu du point de vue de l'algèbre linéaire : chaque fonction sinusoïdale de base représente une fréquence, et une fonction périodique quelconque peut s'interpréter, via la décomposition de Fourier, comme une combinaison de plusieurs fréquences. Beaucoup de systèmes mécaniques ou électroniques se comportent différemment selon les fréquences qu'on leur impose : la décomposition de Fourier est alors nécessaire pour comprendre comment ces systèmes réagissent à chaque composante de la fonction considérée.

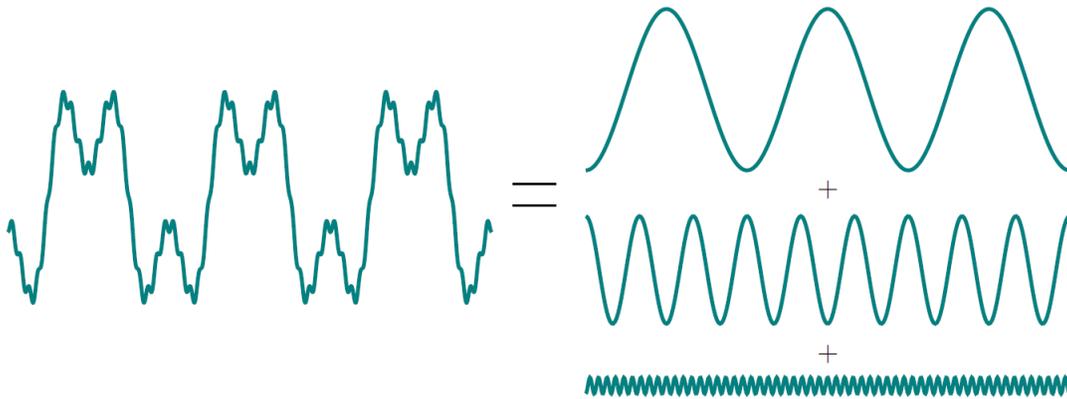


FIGURE 3.1 – Une fonction périodique vue comme somme de trois fonctions sinusoïdales d’amplitudes et fréquences différentes.

3.2. SÉRIES DE FOURIER

3.2.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Dans l’introduction, nous avons évoqué les fonctions périodiques de périodes T . Dans ce chapitre, nous allons essentiellement nous intéresser au cas où $T = 2\pi$. Plus précisément, les fonctions considérées proviendront toutes de l’ensemble $\mathcal{D}_{2\pi}$ défini par

$$\mathcal{F}_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ soit } 2\pi\text{-périodique et continue par morceaux}\}$$

On rappelle qu’une fonction est **continue par morceaux** (noté \mathcal{C}^0 par morceaux, ou $\mathcal{C}^0\text{pm}$) si elle est continue sur chaque parties ouvertes données par une subdivision de \mathbb{R} , et qu’elle admet un prolongement continue sur chaque parties fermées de cette subdivision.

L’ensemble $\mathcal{F}_{2\pi}$ est un **\mathbb{C} -espace vectoriel** muni du **produit scalaire hermitien** suivant :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

De plus, ce produit scalaire fournit une norme sur $\mathcal{F}_{2\pi}$, appelée **norme quadratique** :

$$\| \cdot \|_2 : f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Enfin, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par les fonctions $e_n : x \mapsto e^{inx}$ est une famille **orthonormale** pour le produit scalaire défini $\mathcal{F}_{2\pi}$, c’est à dire qu’on a la relation

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} \text{ pour tous } k, l \in \mathbb{N}.$$

Cette famille constitue en réalité une **base orthonormée** de l'espace $\mathcal{F}_{2\pi}$. Attention, $\mathcal{F}_{2\pi}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel **infini**, donc cette base autorise en réalité les combinaisons linéaires infinies. On appelle cela une **base de Hilbert**.

Prenons un élément $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$: alors, d'après ce qui précède, f se décompose sur la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et cette décomposition (infinie !) s'obtient en **projetant** f sur chaque élément de la base, ce qui se décrit par la relation suivante

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Il s'agit précisément de cette écriture qui conduit à la définition des coefficients et décomposition de Fourier.

Définition 3.1

Soit $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$. On appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres $c_n(f) \in \mathbb{C}$ définis pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N(f)$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$$

Les fonctions $S_N(f)$ définissent une série trigonométrique de terme général $c_n(f) e^{inx}$ et on note $S(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)$ sa somme, que l'on appelle **série de Fourier** de f :

$$S(f)(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarques.

1. Nous avons défini la série de Fourier de f . Dans le paragraphe suivant, nous cherchons à savoir quand est-ce que f se décomposera en somme de fonctions trigonométriques, c'est à dire que f sera égale à sa série de Fourier : $f(x) = S(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Le coefficient $c_0(f)$ est appelé **valeur moyenne** de f , et représente dans la décomposition la partie constante de la fonction f .
3. L'écriture en série de Fourier est **unique**, autrement dit si on a une telle égalité,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(f) e^{inx}$$

alors $c_n(f) = d_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela vient du fait que les fonctions e_n forment une base de l'espace $\mathcal{F}_{2\pi}$.

4. Les fonctions considérées étant 2π -périodiques, les bornes des intégrales n'ont pas d'importance du moment que la longueur de l'intervalle vaut 2π .

Proposition 3.1

Soient $f, g \in \mathcal{F}_{2\pi}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$ (**linéarité**).
2. Si f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors $c_n(f') = i n c_n(f)$ (**dérivation**).

Il existe un équivalent réel des coefficients de Fourier :

Définition 3.2

Soit $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$. Les **coefficients de Fourier (réels)** de f sont les nombres $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$ définis par

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Dans ce cas, la **série de Fourier** de f s'écrit alors comme la suite des sommes partielles $S_N(f)$ définies pour tout $N \in \mathbb{N}$ par

$$S_N(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt).$$

Remarques.

1. Une fonction f est paire **ssi** les coefficients $b_n(f)$ sont nuls pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De même, f est impaire **ssi** les coefficients $a_n(f)$ sont nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$, on a $a_0(f) = c_0(f)$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases} \quad \begin{cases} c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - i b_n(f)) \\ c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + i b_n(f)) \end{cases}$$

Ces relations permettent de jongler entre les coefficients complexes et réels.

Pour finir, tout ce qui a été énoncé dans cette première section se généralise sans difficulté au cas général des fonctions T -périodiques. Il suffit pour cela d'adapter la période des fonctions e_n , ainsi que le produit scalaire. On définit donc \mathcal{F}_T comme suit :

$$\mathcal{F}_T = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ soit } T\text{-périodique et } \mathcal{C}^0\text{pm}\}$$

et la base orthonormée est donnée par les fonctions e_n définies pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ par

$$e_n : t \mapsto \exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Si $f \in \mathcal{F}_T$, ses coefficients de Fourier (complexes) sont donnés pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

et l'équivalent réel est donné, respectivement pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).$$

3.2.2. CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

Dans ce paragraphe, nous énonçons sous quelles hypothèses les séries de Fourier que nous avons définies sont convergentes, et sous quelles hypothèses une fonction périodique se décompose comme série trigonométrique (c'est à dire qu'elle est égale à sa série de Fourier). Le cas le plus simple est celui donné par la convergence via la norme quadratique $\|\cdot\|_2$ que nous avons définie au début de ce chapitre. Dans d'autres cas, il faut énoncer des hypothèses supplémentaires.

Remarque. Les théorèmes de convergence cités dans les paragraphes suivants sont énoncés dans le cas des fonctions 2π -périodique, mais s'adaptent évidemment à toute période T via la remarque précédant ce paragraphe.

★ CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons énoncé brièvement qu'une série de Fourier associée à une fonction f est construite en projetant f sur chaque élément de la base orthonormée $(e_n)_n$. Ce point de vue géométrique conduit au théorème de convergence suivant :

Théorème 3.1 (Convergence en moyenne quadratique)

Si $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

Ce théorème de convergence assure que, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$, on a

$$\|S_N(f) - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Attention, cela n'implique pas $S(f) = f$, mais seulement la convergence presque partout d'une suite extraite (c'est le **théorème de Riesz**, mais nous n'entrerons pas dans les détails ici). En revanche, le corollaire de ce théorème est fondamental, car il permet de calculer la valeur de certaines sommes de séries classiques (par exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Corollaire 3.1 (Égalité de Parseval)

Soit $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$.

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2).$$

★ CONVERGENCE DE DIRICHLET

Nous aimerions à présent établir des hypothèses sous lesquelles f se décompose en série de Fourier, c'est à dire que $f(x) = S(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Du point de vue de l'analyse, une série de Fourier est une série de fonctions, et on peut donc parler de convergence comme nous l'avons fait pour les séries entières. Le théorème de convergence suivant permet d'établir les cas où une fonction f est égale à sa série de Fourier.

Théorème 3.2 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de Fourier $(S_N(f))_N$ converge simplement vers la moyenne des valeurs limites : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont respectivement la limite à droite et à gauche de f au point x .

En particulier, si f est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors $(S_N(f))_N$ converge simplement vers f , et donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = S(f)(x) = f(x).$$

Ce théorème assure donc que si f est \mathcal{C}^1 pm, alors f se décompose en série de Fourier en tout point de continuité de f . On en tire le corollaire suivant :

Corollaire 3.2

Si f est 2π -périodique, continue et \mathcal{C}^1 pm, alors f est égale à sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}.$$

★ **VITESSE DE CONVERGENCE**

Comme dans le cas des séries numériques ou séries entières, nous aimerions préciser la vitesse de convergence des séries de Fourier avec lesquelles nous travaillons, ce qui revient essentiellement à étudier la convergence des coefficients de Fourier associés, qui dépend de la régularité de la fonction f . Cela se résume par la phrase suivante : **plus une fonction f est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent vite vers 0**. C'est l'objet de la propriété suivante :

Proposition 3.2

Si $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$. De plus,

1. Si f est continue et de classe \mathcal{C}^1 pm, alors sa dérivée f' admet une décomposition en série de Fourier, et ses coefficients sont donnés pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

2. Si f est de classe \mathcal{C}^k et de classe \mathcal{C}^{k+1} pm, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

La dernière propriété signifie que, si f est continue, alors ses coefficients $c_n(f)$ sont négligeables par rapport à $\frac{1}{n}$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nc_n(f) = 0$. De même, si f est dérivable, alors ses coefficients sont négligeables par rapport à $\frac{1}{n^2}$, etc. Cela donne des indications quant à la vitesse de convergence des coefficients de Fourier c_n , et donc de la série de Fourier vers f .

3.2.3. ANALYSE SPECTRALE

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons évoqué la notion de **fréquence** d'une fonction. Plus précisément, la décomposition en série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$ consiste à trouver les coordonnées de f dans la base des e_n , et ce sont précisément ces coordonnées qui constituent les fréquences de f . Ainsi, les séries de Fourier s'adaptent aisément aux phénomènes ondulatoires, et plus particulièrement à l'étude du son : filtrage de fréquences, suppression du bruit, fonctionnement de fréquences radio, etc.

Définition 3.3

Soit $f \in \mathcal{F}_{2\pi}$.

1. Le **spectre** de f est donné par la suite de ses coefficients de Fourier, appelés **fréquences** de f . On les représente couramment à l'aide de diagrammes à barres.
2. La **valeur moyenne** de f est donnée par le coefficient $c_0(f) = a_0(f)$.
3. La **fréquence fondamentale** de f est donnée par le coefficient $c_1(f) = c_{-1}(f)$.
4. Les **harmoniques** de f sont données par les coefficients $c_n(f)$, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ces harmoniques sont toutes des multiples de la fréquence fondamentale.
5. On appelle **basses** et **hautes fréquences** de f les coefficients $c_n(f)$ qui correspondent respectivement au indices n « petits » et « élevés », les termes précédents étant relatifs au phénomène étudié.

La donnée d'une fonction 2π -périodique est équivalente à la donnée de ses coefficients de Fourier : ainsi, les représentations de f par sa courbe ou son spectre sont équivalentes. La première permet de visualiser f dans le domaine temporel, tandis que son spectre relève du domaine fréquentiel. Si on souhaite par exemple stocker numériquement une fonction 2π -périodique, il est généralement moins coûteux de garder en mémoire son spectre plutôt que toutes ses valeurs au cours du temps.

Afin d'illustrer ces différentes notions, considérons les exemples suivants.

Exemple 3. Soit $f : t \mapsto 2 + 4 \cos(t) - 2 \cos(5t)$. On a représenté la fonction f et le spectre de ses coefficients de Fourier sur la figure 3.2. Comme ici f est paire, on a choisi de représenter f via ses coefficients réels $a_n(f)$.

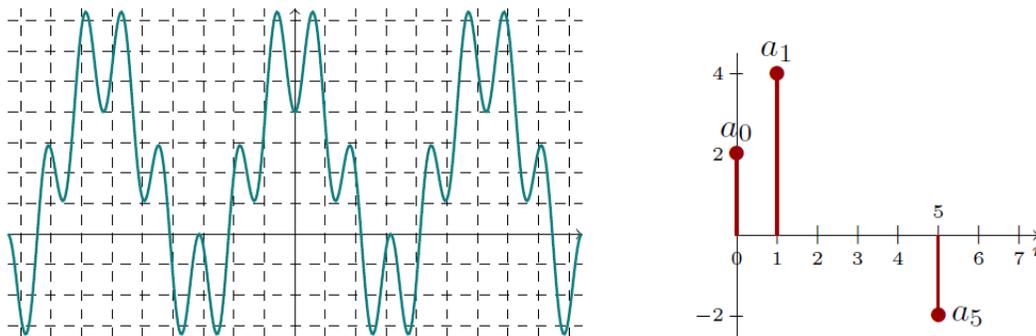


FIGURE 3.2 – La fonction $f : t \mapsto 2 + 4 \cos(t) - 2 \cos(5t)$ et le spectre des coefficients $a_n(f)$.

Le spectre de f se lit comme suit : le coefficient $a_0(f)$ nous indique que la valeur moyenne de f est 2. Ensuite, f est composée d'une basse fréquence forte ($a_1(f) = 4$) et d'une haute fréquence d'amplitude plus faible ($a_5(f) = -2$).

Exemple 4. Soit $g : t \mapsto \cos(t) + 3 \sin(5t) - 2 \cos(7t)$. On a représenté la fonction g et le spectre de ses coefficients sur la figure 3.3. Comme g est impaire, on utilise les coefficients complexes $c_n(g)$ que l'on représente **en module**).

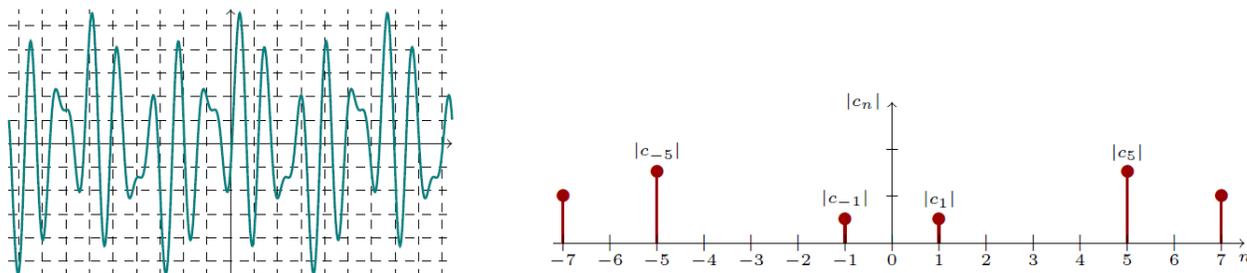


FIGURE 3.3 – La fonction $g : t \mapsto \cos(t) + 3 \sin(5t) - 2 \cos(7t)$ et le spectre des coefficients $c_n(g)$ en module.

On constate que g est composée d'une basse fréquence faible et de deux hautes fréquences d'amplitudes élevées par rapport à la fréquence fondamentale. Sa valeur moyenne est 0 (g est impaire).

3.3. ÉTUDE D'UNE FONCTION 2π -PÉRIODIQUE

Dans ce paragraphe, nous allons faire l'étude complète d'une fonction 2π -périodique via sa série de Fourier, selon les notions que nous avons définies dans les paragraphes précédents.

On considère la fonction f de période $T = 2\pi$ définie sur l'intervalle $] -\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

puis étendue naturellement sur \mathbb{R} par 2π -périodicité. Une illustration de cette fonction est donnée par la figure 3.4. A noter que cette fonction n'est pas continue, qu'elle est impaire ($f(-x) = -1 = -f(x)$) et qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

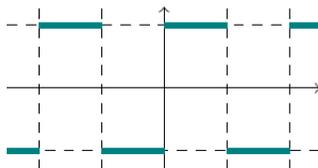


FIGURE 3.4 – La fonction f de période $T = 2\pi$ définie sur $] -\pi, \pi[$ par $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = -1$ si $x \in]-\pi, 0[$, puis étendue sur \mathbb{R} par 2π -périodicité.

* **Coefficients de Fourier de f .** Commençons par calculer les coefficients de Fourier. Pour commencer, on a clairement $c_0(f) = 0$ (f est impaire), ce qui signifie que la fonction f est de moyenne nulle. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-int} dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt = i \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Comme f est impaire, les $c_n(f)$ sont tous des imaginaires purs. La suite des sommes partielles de la série de Fourier de f est donc donnée pour tout $N \in \mathbb{N}$ par

$$S_N(f)(x) = - \sum_{\substack{n=-N \\ n \text{ impair}}}^N \frac{2i}{n\pi} e^{inx}$$

Notons que, f étant impaire, on peut passer par les coefficients réels : en effet, on sait que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour $n \geq 1$, on a

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $S_N(f)(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^N \frac{4}{n\pi} \sin(nx)$

* **Convergence de la série de Fourier de f .** f est 2-périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = S(f)(x)$$

Les points de discontinuités de f sont les multiples de π . En particulier, pour tout $x \neq n\pi$, autrement dit pour tout $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]-n\pi, n\pi[$, f est égale à sa série de Fourier, soit

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$$

Par exemple, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

La série ainsi obtenue est convergente (**règle de Leibniz**). De plus, en utilisant les développements en séries entières des fonctions usuelles donnés, on obtient

$$S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \arctan(1) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Prenons à l'inverse un point de discontinuité de f , par exemple $x = 0$. Comme f est impaire, la décomposition de Fourier en somme de sinus nous donne directement $S(f)(0) = 0$. D'un autre côté, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, donc l'égalité de Dirichlet est bien respectée :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(0) = S(f)(0) = 0 = \frac{1 + (-1)}{2} = \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}.$$

* **Spectre et fréquences de f .** En utilisant le module des coefficients de Fourier (ou directement les $b_n(f)$ si on veut utiliser les coefficients réels), on peut dessiner le spectre de f , comme présenté sur la figure 3.5.

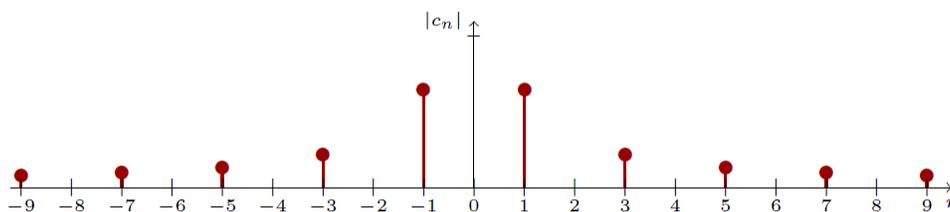


FIGURE 3.5 – Le spectre de f donné par les $|c_n(f)|$.

On remarque premièrement que seuls les multiples impairs de la fréquence fondamentale $|c_1(f)| = |c_{-1}(f)|$ sont présents sur le spectre (les coefficients sont nuls quand n est pair). Par ailleurs, la décroissance des coefficients est plutôt lente : en effet, on a constaté par le calcul que les $c_n(f)$ sont de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Ce constat est également lié au fait que f n'est pas continue, et donc très peu régulière. Ce spectre est riche, et composé de basses fréquences fortes et de hautes fréquences de plus en plus faibles.

Analysons ces résultats plus en détails : pour $N = 1$, on a

$$S_1 f(x) = c_1(f)e^{ix} + c_{-1}(f)e^{-ix} = -\frac{2i}{\pi} i \sin(x) + \frac{2i}{\pi} (-i) \sin(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x)$$

Le premier graphique de la figure 3.6 donne une comparaison entre $S_1(f)$ et f . On fait ensuite croître les valeurs de N , et on représente les fonctions $S_N(f)$ à mesure que N augmente, afin de comparer avec la courbe de f . On constate bien que la série converge relativement lentement vers f . Il se trouve que, même avec une centaine de termes, nous n'obtenons pas une approximation satisfaisante. Par ailleurs, un phénomène intéressant se produit ici : aux points de discontinuités de f , des pics apparaissent au niveau des $S_N(f)$. Plus N augmente et plus ces pics se concentrent près du pont de discontinuité, mais en revanche leur taille ne diminue pas. C'est ce qu'on appelle le **phénomène de Gibbs**.

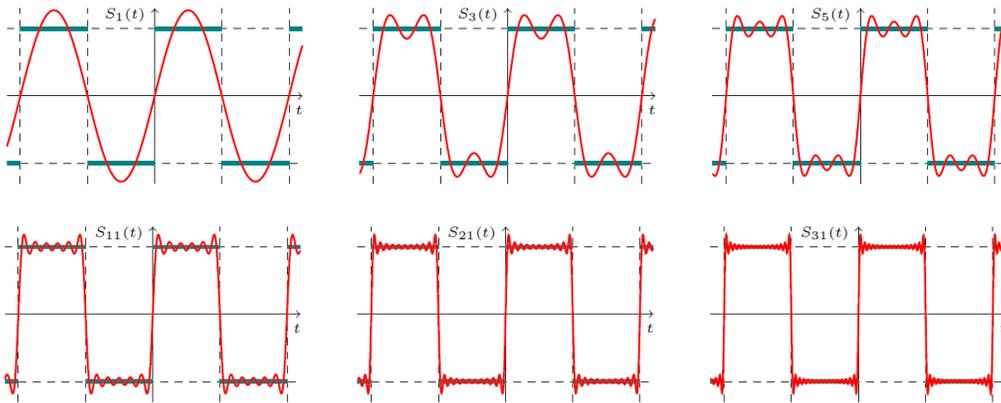


FIGURE 3.6 – Comparaison des premières sommes partielles $S_N(f)$ avec la fonction f .

A titre de comparaison, la figure 3.7 illustre ce que l'on peut obtenir pour une fonction 2π -périodique de classe \mathcal{C}^2 définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g : t \mapsto \cos(\pi x^2)$. On voit bien que la convergence est relativement plus rapide, les coefficients de Fourier étant ici de l'ordre de $\frac{1}{n^4}$ (approximativement, on a $a_0(g) \approx 0,37$, $a_1(g) \approx 0,91$, $b_1(g) \approx 0$, $a_2(g) \approx -0,35$, etc.). L'approximation par la série de Fourier est plutôt satisfaisante avec seulement quatre fréquences. Notons tout de même que les points où l'approximation est la moins bonne sont ceux où la fonction g est la moins régulière, en l'occurrence là où elle n'est pas de classe \mathcal{C}^3 .

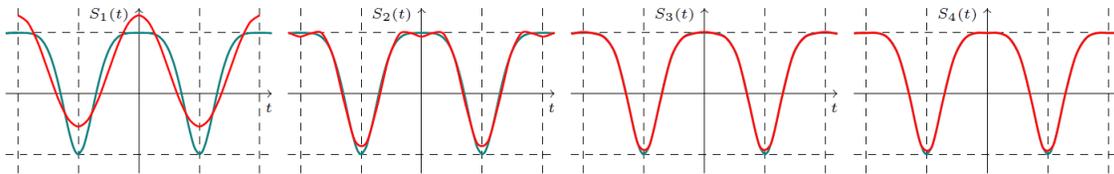


FIGURE 3.7 – Convergence de $S_N(g)$ vers la fonction $g : x \mapsto \cos(\pi x^2)$.

*** Égalité de Parseval.** La fonction f est 2π -périodique, continue par morceaux et impaire, le théorème de convergence moyenne quadratique (via l'égalité de Parseval) assure donc que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2$$

Il suffit à présent de calculer chaque terme de cette égalité :

$$\bullet \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1 \qquad \bullet \quad b_n(f)^2 = \frac{16}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ impair, } 0 \text{ sinon}$$

Ainsi, l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f permet de démontrer l'égalité :

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3.4. EXERCICES

★ **Exercice 7.** Soit f la fonction 2π -périodique et impaire définie par

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - \pi x$$

1. Donner l'expression de f sur un intervalle de longueur de 2π , puis tracer son graphe sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Quel est le domaine de continuité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f , puis donner l'expression de la série de Fourier $S(f)$ associée.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier obtenue à la question précédente.
4. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ puis en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

★ **Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique impaire définie par Soit f la fonction 2π -périodique et impaire définie par

$$f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi - x$$

1. Donner l'expression de f sur un intervalle de longueur de 2π , puis tracer son graphe sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Quel est le domaine de continuité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f , puis donner l'expression de la série de Fourier $S(f)$ associée.
3. Soit $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Quelle est la valeur de $S(f)(x)$?
4. Étudier la convergence de la série $S(f)$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \sin(nx) = \pi - x.$$

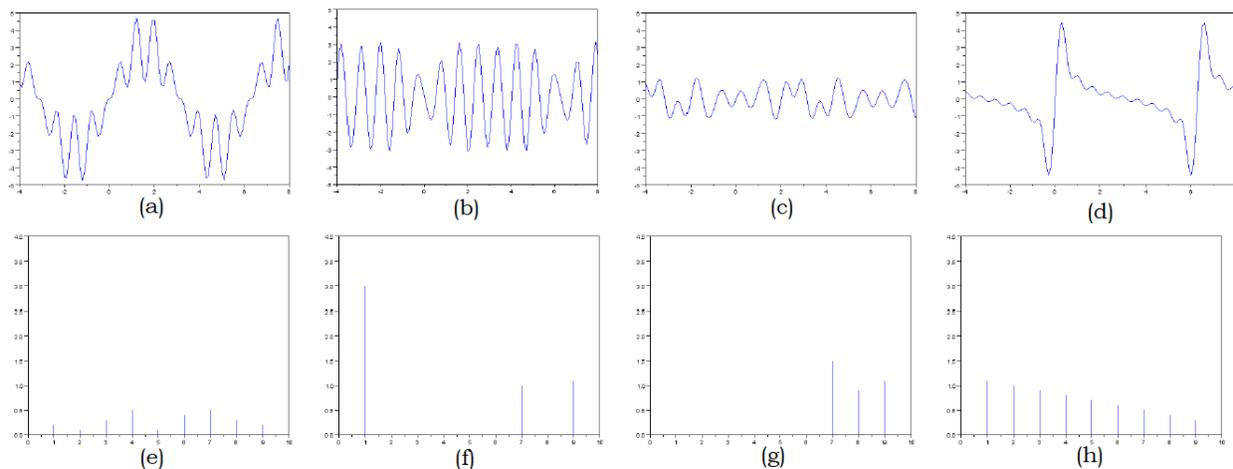
5. Démontrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★ **Exercice 9.** On définit quatre fonctions 2π -périodiques sur $] - \pi, \pi[$:

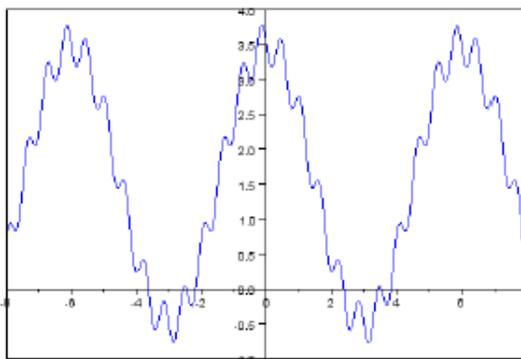
$$f_1 : x \mapsto x ; \quad f_2 : x \mapsto |x| ; \quad f_3 : x \mapsto x^2 ; \quad f_4 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour chacune de ces fonctions, effectuer le même procédé qu'à l'exercice précédent : calculer les coefficients de Fourier puis étudier la convergence de la série de Fourier obtenue à l'aide du théorème de Dirichlet. Enfin, appliquer l'égalité de Parseval pour déduire les valeurs de certaines sommes ($\sum_n \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{1}{n^4}$, $\sum_n \frac{1}{(2n+1)^2}$, etc.).

★ **Exercice 10.** Les graphiques (a), (b), (c) et (d) représentent les courbes de fonctions impaires. Pour chacune d'elle, déterminer le spectre de Fourier correspondant parmi les graphiques (e), (f), (g) et (h).



★ **Exercice 11.** Déterminer approximativement la série de Fonction correspondant à la courbe ci-dessous.



★ **Exercice 12.** Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = f(x)$.

Indications : On cherchera une solution particulière sous la forme d'une série de Fourier.

CHAPTER 4.

ÉQUATIONS DES ONDES ET DE LA CHALEUR

4.1. L'ÉQUATION DES ONDES

4.1.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On considère une corde élastique de longueur L fixée en ses extrémités. On note $y : (x, t) \mapsto y(x, t)$ la fonction à deux variables qui associe la hauteur de la corde au niveau de l'abscisse x à l'instant t . Le modèle considéré est présenté dans la figure 4.1.

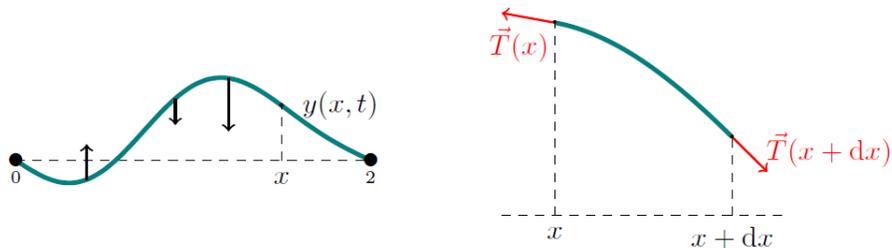


FIGURE 4.1 – Une corde élastique de longueur L fixée en ses extrémités. La fonction y associe la hauteur de la corde

On néglige le poids de la corde et les frottements : les seules forces en présence sont des forces de tension. On fait également l'hypothèse que les vibrations de la corde restent très faibles au cours du temps. Le principe fondamental de la dynamique et une linéarisation de l'équation nous permettent d'obtenir l'équation des ondes que nous allons chercher à résoudre :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

avec $\nu = \sqrt{\frac{T_0}{m}}$, où m désigne la masse de la corde et T_0 sa tension. Si on considère une plaque vibrante, on ajoute une dimension spatiale, et l'équation (4.1) devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.2)$$

Les équations (4.1) et (4.2) permettent de modéliser presque tous les problèmes de vibrations ou de propagations d'ondes : cordes de guitare, peaux de tambours, poutres et bâtiments, propagation du son, de la lumière, d'ondes électromagnétiques, etc. Dans notre cas, nous nous concentrerons sur le cas de la dimension deux, avec l'équation (4.1) et les conditions au bord données par le modèle de la figure 4.1. En résumé, nous chercherons dans la première partie de ce chapitre à résoudre le problème suivant :

♥ (Équation des ondes : problème général)

On cherche à trouver les fonction $y : (x, t) \mapsto y(x, t)$ satisfaisant :

1. L'équation des ondes (4.1) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

2. Les conditions au bord : $\forall t > 0, y(0, t) = y(L, t) = 0$.

Remarques.

1. Le problème présenté ci-dessus admet une infinité de solution, mais en admet une unique pour chaque conditions initiales précisées (position initiale $y_0(x) = y(x, 0)$ et vitesse initiale $v_0(x) = v(x, 0)$).
2. Ce problème correspond au **problème de référence**, c'est la version homogène d'un problème plus général dans lequel on peut ajouter des conditions au bord non nulles ou encore un second membre (gravité, etc.). Dans les exercices, on fera toujours en sorte de se ramener à ce problème, que l'on saura alors résoudre.

4.1.2. RECHERCHE DES SOLUTIONS STATIONNAIRES

Définition 4.1

On appelle **solutions stationnaires** de l'équation des ondes (4.1) les solutions y **non nulles** s'écrivant

$$y(x, t) = u(x)v(t)$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, ce sont les solutions pour lesquelles il est possible de **séparer la composante spatiale de la composante temporelle**.

Ces solutions sont fondamentales dans la résolution de notre problème, en particulier au vu de la proposition suivante.

Proposition 4.1

Les solutions stationnaires constituent une base de solutions de l'équation des ondes (4.1).

La proposition précédente signifie qu'une solution quelconque du problème peut simplement s'écrire comme combinaison linéaire (infinie) de solutions stationnaires. La résolution de l'équation des ondes (4.1) est donc réduite à la recherche de solutions pour lesquelles on peut séparer la composante spatiale de la composante temporelle. Nous admettrons ce résultat dans ce cours, mais nous noterons l'interprétation physique suivante : les solutions stationnaires correspondent à ce qu'on appelle les **modes propres de vibration de la corde**. En d'autres termes, ce sont les façons les plus « naturelles » qu'à la corde de vibrer. Ces modes propres sont associés aux fréquences propres de la corde, ou encore fréquence de résonance de la corde. Si on excite la corde avec une fréquence égale à une de ses fréquences propres, la corde va se mettre à vibrer fortement selon le mode propre correspondant.

Concentrons-nous à présent sur la recherche des solutions stationnaires : procédons pour cela par analyse/synthèse. On pose $y : (x, t) \mapsto y(x, t)$ que l'on suppose être une solution stationnaire de (4.1). Par définition, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$y(x, t) = u(x)v(t).$$

Comme y est solution, on peut l'injecter dans (4.1). On obtient alors

$$u(x)v''(t) = \nu^2 u''(x)v(t) \quad \text{ssi} \quad \frac{v''(t)}{\nu^2 v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)}.$$

L'égalité obtenue n'a de sens que si chacun des membres est constant (c'est une égalité entre une fonction de la variable t et une fonction de la variable x) : il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{v''(t)}{\nu^2 v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = \lambda.$$

En réordonnant les termes, on obtient finalement deux équations différentielles linéaires d'ordre 2, que l'on sait donc résoudre :

$$\begin{cases} (1) : & u''(x) - \lambda u(x) = 0 \\ (2) : & v''(t) - \nu^2 \lambda v(t) = 0 \end{cases}$$

• **Étude de la constante $\lambda \in \mathbb{R}$** : D'abord, si $\lambda = 0$, alors on a $u''(x) = 0$, donc u est de la forme $ax + b$. En utilisant les conditions au bord, on a

$$y(0, t) = 0 = u(0)v(t) = bv(t),$$

mais y est une solution stationnaire donc v ne peut pas être la fonction nulle (sinon y serait elle-même nulle), et donc $b = 0$. De même, la condition $y(L, t) = 0$ donne $aLv(t) = 0$, soit $a = 0$. Ainsi, $u(x) = 0$ soit $y(x, t) = 0$ ce qui est exclu. Finalement, la constante λ est non nulle.

De même, supposons $\lambda > 0$. Alors, les deux équations conduisent à un polynôme caractéristique de la forme $X^2 - c = 0$, avec c une constante strictement positive ($c = \lambda > 0$ pour (1) et $c = \nu^2\lambda > 0$ pour (2) respectivement). En particulier, on aurait pour l'équation (2) des solutions de la forme

$$v(t) = c_1 \exp(t\nu\sqrt{\lambda}) + c_2 \exp(-t\nu\sqrt{\lambda})$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, et ces solutions tendent vers $+\infty$ à mesure que le temps augmente ($t \rightarrow +\infty$), ce qui n'a aucun sens physique (si $c_1 = 0$, le terme de droit tend vers 0 en $+\infty$, ce qui est également impossible d'un point de vue physique).

Ainsi, **la constante λ est strictement négative**. Passons maintenant à la résolution des équations (1) et (2).

• **Résolution de l'équation (1)** : Le polynôme caractéristique est de la forme $X^2 - \lambda$, avec $\lambda < 0$. Les racines sont donc données par $\pm i\sqrt{\lambda}$, et les solutions de (1) sont donc de la forme

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Utilisons les conditions initiales pour déterminer ces deux constantes : d'abord, $y(0, t) = c_1v(t) = 0$, donc $c_1 = 0$. De même $y(L, t) = 0$ donne $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, mais si $c_2 = 0$, alors $u(x) = 0$ et $y(x, t) = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, λ est solution de l'équation

$$\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

soit $\sqrt{(-\lambda)L} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (si $k = 0$, alors $L = 0$ ou $\lambda = 0$, ce qui est impossible dans les deux cas). Finalement, on en déduit la valeur de la constante $\lambda < 0$:

$$\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

On obtient ainsi les solutions générales de (2) : pour tout $x > 0$, on a

$$u(x) = c \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}.$$

A noter que le rôle de la constante c est sans importance ici, contrairement à celui de k : en effet, chaque valeur de k va conduire à un mode propre de vibration de la corde.

• **Résolution de l'équation (2) :** La résolution se fait de manière analogue à (1), à la différence près qu'on connaît maintenant la valeur de λ . Les solutions générales sont donc données par

$$v(t) = a \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L} t\right) + b \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L} t\right) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{N}^*$$

Finalement, on peut déduire les solutions stationnaires de l'équation des ondes :

♥ (Équation des ondes : solutions stationnaires)

Les solutions **stationnaires** de l'équation des ondes (4.1) sont de la forme

$$y_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L} t\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L} t\right) \right)$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_k, B_k \in \mathbb{R}$.

Remarque. Nous l'avons évoqué brièvement plus haut, chaque valeur de $k \geq 1$ correspond ici à un mode propre de vibration de la corde. La figure 4.2 illustrent les trois premiers modes : la partie spatiale $u(x)$ représente la forme de la corde, et la partie temporelle $v(t)$ représente la variation de son amplitude au cours du temps. Sa fréquence, qui dépend de k et donc du mode considéré, est la fréquence de vibration du mode. Plus on augmente k , plus les modes associés ont des fréquences de vibrations élevées.

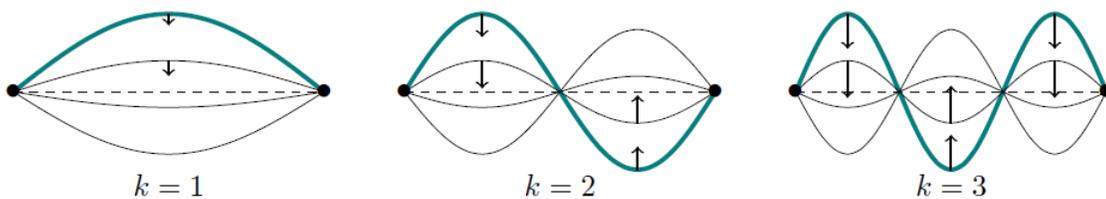


FIGURE 4.2 – Les trois premiers modes propres de vibration de la corde pour les solutions stationnaires ($k = 1, 2, 3$).

4.1.3. SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME

D'après la proposition 4.1, les solutions stationnaires constituent une base de solutions pour l'équation des ondes 4.1. Ainsi, une solution quelconque de cette équation peut s'écrire simplement comme une combinaison linéaire (infinie!) de solutions stationnaires. Le paragraphe précédent permet donc de déduire les solutions générales de (4.1).

♥ (Équation des ondes : solutions générales)

Les solutions **générales** de l'équation des ondes (4.1) sont de la forme

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) \right)$$

avec $A_k, B_k \in \mathbb{R}$.

Cette expression permet en outre d'interpréter des vibrations comme solutions stationnaires et ainsi de les analyser en terme de fréquences. Les coefficients A_k et B_k permettent ainsi de décrire le spectre de la vibration.

4.1.4. CONDITIONS INITIALES ET SOLUTIONS PARTICULIÈRES

Afin de caractériser pleinement une solution de l'équation des ondes (4.1), on va se donner deux conditions initiales : la **position initiale** et la **vitesse initiale**. Autrement dit, on suppose connues la forme initiale de la corde, donnée par une fonction notée $y_0 : x \mapsto y_0(x)$, et la vitesse initiale en tout point, donnée par une fonction $v_0 : x \mapsto v_0(x)$. On résume cela par la ligne suivante :

Conditions initiales pour (4.1) : $\forall x \in]0, L[, y(x, 0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$.

Dans la résolution d'une équation différentielle, la première étape consiste toujours à déterminer la forme générale des solutions, puis les conditions initiales permettent de déterminer l'**unique** solution du problème correspondant. Dans notre cas, il s'agit de trouver tous les coefficients A_k et B_k associés à la position et la vitesse initiale. C'est un problème dont la résolution peut s'avérer bien souvent fastidieuse, mais dans le cas précis de l'équation (4.1), il est possible de s'en sortir notamment grâce aux séries de Fourier.

Considérons la solution générale

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) \right)$$

et écrivons la première condition :

$$y(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = y_0(x).$$

On reconnaît ici une série de Fourier d'une fonction impaire, de période $2L$. La condition de position initiale indique que cette série est égale à la fonction y_0 sur l'intervalle $]0, L[$, et

l'on peut prolonger cette fonction par $2L$ -périodicité. Ainsi, on en déduit que les coefficients A_k sont en fait les coefficients de Fourier de la fonction y_0 , et il est donc possible d'en donner leur expression :

$$A_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L y_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

De même, en s'autorisant à dériver sous le signe somme, on peut écrire la seconde condition initiale associée à la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(-A_k \nu \frac{k\pi}{L} \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right) + B_k \nu \frac{k\pi}{L} \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu k\pi}{L} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ &= v_0(x) \end{aligned}$$

Comme pour la position initiale, on reconnaît la série de Fourier associée à la fonction impaire et $2L$ -périodique v_0 . On peut donc en déduire les coefficients de Fourier B_k associées :

$$B_k = \frac{L}{\nu k\pi} \times \left(\frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \right) = \frac{2}{\nu k\pi} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

Ainsi, les coefficients A_k et B_k sont connus et calculables : on a donc trouvé (sous forme de série de Fourier) l'unique solution du problème (4.1) associés aux conditions initiales de position et de vitesse.

♥ (Équation des ondes : unique solution associée à une condition initiale)

L'unique solution de l'équation des ondes (4.1) associée aux conditions initiales $y(x, 0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ est donnée par :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) \right)$$

avec

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad \text{et} \quad B_k = \frac{2}{\nu k\pi} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

4.1.5. APPLICATION : CORDE FRAPPÉE

Notre objectif à présent est d'utiliser le travail fait précédemment afin d'appliquer la résolution de l'équation des ondes (4.1) à des problèmes concrets. Le problème que nous étudions ici est celui de la **corde frappée**, par exemple une corde de piano. Dans tout ce qui suit et pour simplifier, on considère une corde de **longueur 1**. Cette corde, initialement au repos, est frappée et l'on souhaite décrire la vibration créée par le choc. Ainsi, il s'agit simplement de traduire mathématiquement les conditions initiales de ce problème puis d'appliquer les formules obtenues précédemment.

La corde est initialement au repos, donc la **position initiale** de la corde est donnée par $y_0(x) = 0$. Ensuite, le choc se traduit par une impulsion donnée à la corde : on peut le modéliser en considérant que, dans la zone où la corde est frappée, celle-ci possède une vitesse initiale non nulle. Plus précisément, nous allons supposer que la vitesse initiale est donnée par $-v$ sur l'intervalle où a lieu le choc, et 0 partout ailleurs. La **vitesse initiale** $v_0(x)$ est donnée par la figure 4.3.

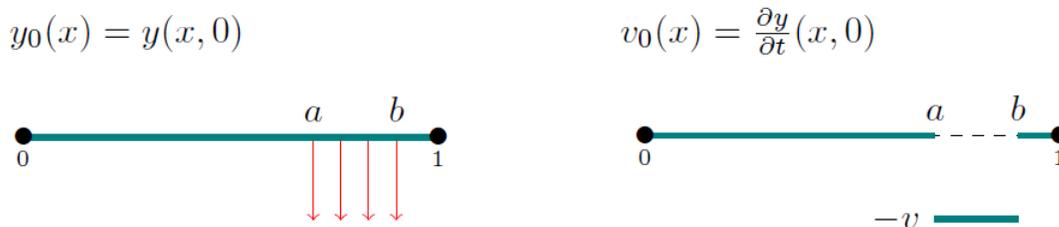


FIGURE 4.3 – Les conditions initiales associées au problème de la corde frappée.

Il s'agit maintenant d'appliquer les résultats des paragraphes précédents aux conditions initiales ainsi données et au cas $L = 1$. La solution du problème est alors donnée par

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x) (A_k \cos(\nu k\pi t) + B_k \sin(\nu k\pi t))$$

avec

$$A_k = 2 \int_0^1 y_0(x) \sin(k\pi x) dx = 0$$

et

$$B_k = \frac{2}{\nu k\pi} \int_0^1 v_0(x) \sin(k\pi x) dx = \frac{2v (\cos(k\pi b) - \cos(k\pi a))}{\nu k^2 \pi^2}.$$

Finalement, la vibration de la corde frappée est donnée par

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2v (\cos(k\pi b) - \cos(k\pi a))}{\nu k^2 \pi^2} \sin(k\pi x) \sin(\nu k\pi t).$$

La figure 4.4 fournit une interprétation de la solution générale comme superposition de vibrations élémentaires. De plus, chaque corde vibre à une certaine fréquence, et les amplitudes de ces vibrations sont données par les coefficients de Fourier B_k précédemment calculés. Ces amplitudes permettent de décrire le spectre de la corde frappée, comme illustré par la figure 4.5.



FIGURE 4.4 – La vibration générale est une superposition de vibrations élémentaires.

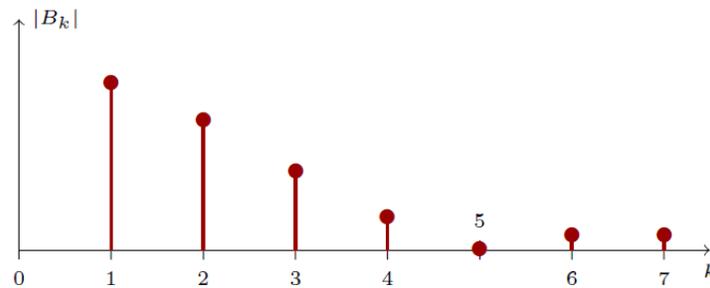


FIGURE 4.5 – Le spectre de la corde frappée.

Enfin, l'expression de la solution générale permet de représenter la vibration de la corde au cours du temps. La figure 4.6 montre la somme des sept premiers temps de la série pour cinq valeurs successives de t . On observe que la corde commence à vibrer là où la corde a été frappée puis l'onde ainsi créée se propage vers la gauche de la corde. Nous avons supposé notre modèle sans frottement, donc l'onde continuera indéfiniment de se propager le long de la corde avec des réflexions aux extrémités. Rappelons que ce modèle n'est valable que pour de très petites oscillations de la corde, et que les amplitudes des figures sont exagérées afin que ces dernières soient lisibles.

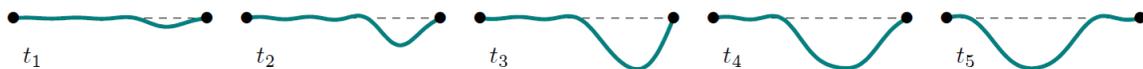


FIGURE 4.6 – Propagation de l'onde sur la corde frappée au cours du temps.

4.2. L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

L'équation de la chaleur est mathématiquement du même type que l'équation des ondes, et sa résolution est analogue. Il nous suffit donc de reprendre les étapes précédentes sans détailler les calculs.

4.2.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On considère une tige métallique de longueur L située dans un milieu isolant et dont les extrémités sont en contact avec un milieu à 0 degré. L'objectif est de décrire l'évolution de la température dans la tige.

Modélisons le problème : on note $T(x, t)$ la température de la tige en position x de la tige et à l'instant t . L'étude locale des transferts thermiques dans la tige permet d'établir l'équation de la chaleur qui décrit l'évolution de T au cours du temps, et il suffit de l'interpréter comme une équation de propagation de la chaleur dans la tige, ce qui conduit au problème suivant :

♥ (Équation de la chaleur : problème)

On note c le coefficient de diffusivité thermique de la tige. On cherche à trouver les fonction $T : (x, t) \mapsto T(x, t)$ satisfaisant :

1. L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c \Delta T \quad (4.3)$$

2. Les conditions au bord : $\forall t > 0, T(0, t) = T(L, t) = 0$.

Remarque. Comme pour l'équation des ondes, le problème ci-dessus constitue le problème de référence (conditions au bord nulles et pas de second membre) auquel on cherchera toujours à se ramener dans les exercices. De même, à une condition initiale donnée (température initiale $T_0(x) = T(x, 0)$), il admet une unique solution.

4.2.2. RÉOLUTION

Afin de résoudre ce problème, nous allons suivre le même procédé que celui effectué pour l'équation des ondes. On commence donc par chercher les **solutions stationnaires**, à savoir les fonction T solutions de (4.3) de la forme

$$T(x, t) = u(x)v(t).$$

En injectant dans l'équation (4.3) et après séparation des variables, on obtient, comme pour l'équation des ondes, les deux équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivante (que l'on sait résoudre) :

$$\begin{cases} (1) : u''(x) - \lambda u(x) = 0 \\ (2) : v'(t) - \lambda cv(t) = 0 \end{cases}$$

Grâce aux conditions au bord $T(0, t) = T(L, t) = 0$, on récupère la constante

$$\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

ce qui permet de conclure quant aux solutions de chacune des équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} (1) : u(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad b \in \mathbb{R}^* \\ (2) : v(t) = d \exp\left(-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\right), \quad c \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

En utilisant le travail fait précédemment pour la résolution de l'équation des ondes (4.1), on obtient les solutions stationnaires du problème donnée par l'équation de la chaleur (4.3) :

♥ (Équation de la chaleur : solutions stationnaires)

Les solutions **stationnaires** de l'équation de la chaleur (4.3) sont de la forme

$$T_k(x, t) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \exp\left(-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\right)$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_k \in \mathbb{R}$.

La figure 4.7 permet de visualiser les premières solutions stationnaires : les représentations de température sont des sinusoides qui convergent vers 0 au cours du temps. A noter que la convergence vers 0 est d'autant plus rapide que k est élevé. Contrairement au cas des problèmes de vibration, il est difficile de donner un sens physique à ces répartitions de température particulières.

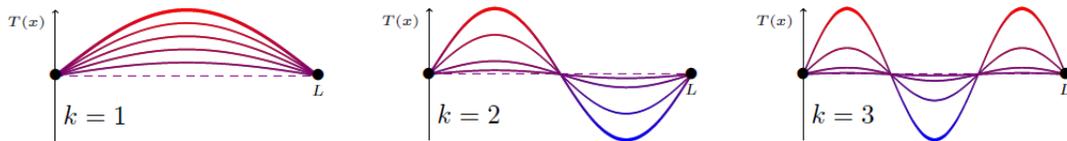


FIGURE 4.7 – Propagation de l'onde sur la corde frappée au cours du temps.

La proposition 4.1 nous indique que les solutions stationnaires forment une base des **solution générales**, et on obtient ainsi les solutions générales du problème (4.3) :

♥ (Équation de la chaleur : solutions générales)

Les solutions **générales** de l'équation de la chaleur (4.3) sont de la forme

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \exp\left(-ct \frac{\pi^2 k^2}{L^2}\right)$$

avec $A_k \in \mathbb{R}$.

Enfin, on va se donner une **condition initiale**, ce qui permettra de déterminer A_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Notons que l'équation de la chaleur est d'ordre 1 en la variable t : ainsi, une seule condition initiale suffit à déterminer une solution particulière du problème.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, la température dans la tige est décrite par une fonction

$$T_0(x) := T(x, 0).$$

Alors, en injectant cette condition dans la solution générale ci-dessus, on obtient une série de Fourier, et on est donc capable d'exprimer les coefficients A_k en fonction de la température initiale T_0 :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A_k = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Ainsi, le problème de l'équation de la chaleur est entièrement résolu, et on a caractérisé pleinement une solution de l'équation de la chaleur (4.3). A noter que le terme exponentiel dans notre solution se rapproche très rapidement de 0 lorsque k tend vers $+\infty$: dans les cadres les plus standards, cela se traduit par une convergence extrêmement rapide de la série. En pratique, on est capable d'obtenir des résultats très précis en calculant uniquement les premiers termes de la série.

♥ (Équation de la chaleur : unique solution associée à une condition initiale)

L'unique solution de l'équation de la chaleur (4.3) associée à la condition initiale $T_0(x) = T(x, 0)$ est donnée par

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \exp\left(-ct \frac{\pi^2 k^2}{L^2}\right)$$

avec

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

4.2.3. APPLICATION : PORTE DE RÉFRIGÉRATEUR

Comme pour l'équation des ondes, nous allons appliquer le travail fait précédemment à des problèmes concrets : nous considérons ici une **porte de réfrigérateur**, en contact en son bord intérieur avec un milieu à 4° , et en son bord extérieur avec un milieu à 20° . Décrire l'évolution de la température T au cours du temps t se modélise au moyen de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$$

avec les conditions au bord

$$\forall t \geq 0, \quad T(0, t) = 4 \text{ et } T(L, t) = 20.$$

La différence avec le problème initial est donc donné par les conditions au bord. Ainsi, si T_h est une solution du problème général (4.3) et T_p est une solution du nouveau problème, alors on peut vérifier par linéarité que $T_h + T_p$ est encore une solution du nouveau problème (pour les conditions au bord, on a $0 + 4 = 4$ et $0 + 20 = 20$). En d'autres termes, le problème de référence (4.3) est ici l'équivalent de l'équation homogène, et les solutions sont alors toutes de la forme "solution homogène + solution particulière".

Ainsi, pour résoudre le problème de la porte de réfrigérateur, il suffit de trouver une solution particulière. Pour cela, nous allons considérer une solution classique, à savoir la **solution à l'équilibre**, c'est à dire la solution qui reste constante au cours du temps. Autrement dit, cette solution dépend uniquement de la variable "position" x :

$$T_p(x, t) = T_p(x).$$

Dans ce cas, l'équation de la chaleur devient simplement $0 = cT_p''(x)$, soit $T_p(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. D'autre part, les conditions au bord imposent que $T_p(0) = 4$ et $T_p(L) = 20$, ce qui permet de trouver $b = 4$ et $a = \frac{16}{L}$. Ainsi, la solution à l'équilibre est donnée par

$$T_p(x) = \frac{16}{L}x + 4$$

ce qui signifie qu'à l'équilibre, la température se répartit linéairement dans la porte.

La solution générale du problème s'écrit alors $T = T_p + T_h$, où T_h est la solution du problème de référence (la solution homogène). On obtient donc finalement

$$T(x, t) = \frac{16}{L}x + 4 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \exp\left(-ct \frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)$$

On constate (sans surprise) que de telles solutions convergent au cours du temps vers la solution à l'équilibre.

Enfin, si on connaît la température initiale T_0 dans la porte du réfrigérateur, on peut en déduire les coefficients A_k de la même manière que dans la partie précédente :

$$T_0(x) - \frac{16}{L}x - 4 = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Les coefficients A_k sont ainsi donnés par

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(T_0(x) - \frac{16}{L}x - 4\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

Pour prendre un exemple concret, on considère les constantes $L = 0.1$, $c = 10^{-6}$ et $T_0(x) = 20$. On calcule les coefficients

$$A_k = 20 \int_0^{0.1} (20 - 160x - 4) \sin(10k\pi x) dx$$

La figure 4.8 illustre pour différentes valeurs de t la solution $T(x, t)$ où l'on a calculé uniquement les cinq premiers coefficients de la solution :

$$T(x, t) \simeq \sum_{k=1}^5 \sin(10k\pi x) e^{-10^{-3}k^2\pi^2 t}$$

On remarque que pour t proche de 0, le graphe n'est pas satisfaisant car il manque des coefficients dans l'approximation. Pour t suffisamment grand, les termes élevés de la série convergent très rapidement vers 0, et l'approximation devient alors plus précise. A partir de la cinquième courbe, le premier terme de la série suffirait presque à obtenir des graphes quasiment identiques.

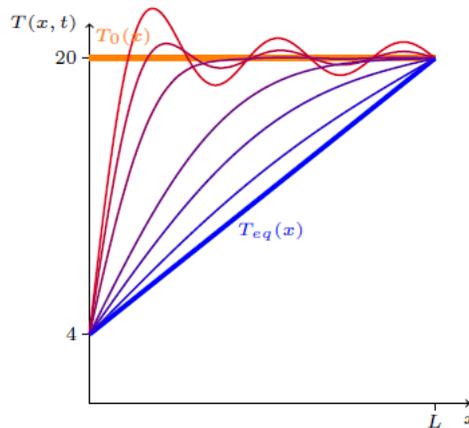


FIGURE 4.8 – Évolution de la température au cours du temps.

4.3. EXERCICES

★ Exercice 13. Spectre de la corde de guitare

On considère une corde de longueur L initialement pincée en son milieu et soulevée à une hauteur h (la corde a alors la forme d'un triangle isocèle) puis lâchée avec une vitesse nulle. On suppose les extrémités fixées à la hauteur 0.

1. Déterminer les conditions initiales $y_0(x)$ et $v_0(x)$ associées à ce problème.
2. Déterminer les coefficients A_k et B_k associés à ces conditions initiales.
3. Résoudre l'équation des ondes dans le cas de ce nouveau problème.
4. Que devient la solution générale si l'on modifie les conditions au bord, en supposant par exemple que les extrémités sont fixées à la hauteur 1 ?

★ Exercice 14. Porte de frigidaire

On considère une tige métallique de longueur L homogène et à une certaine température initiale $T_0(x)$. A l'instant initial, elle est mise en contact en ses deux extrémités avec des milieux de températures respectives 4 et 20. On note $T(x, t)$ la température de la tige en x à l'instant t .

1. Déterminer la solution à l'équilibre $T_{eq}(x)$.
2. Montrer que la fonction $T - T_{eq}$ vérifie les conditions du cours.
3. En déduire l'expression de $T - T_{eq}$ puis celle de T .
4. Résoudre le problème en considérant une tige de longueur 4 dont la température initiale est 10.

★ Exercice 15. Corde pesante

On considère une corde de longueur 1 fixée en ses extrémités. On suppose qu'elle est soumise à la force de gravité g . Avant l'instant initial, la corde est maintenue en position horizontale. L'équation des ondes est alors de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g.$$

1. Montrer que $y_L(x, t) = -\frac{gx(1-x)}{2\nu^2}$ est la solution à l'équilibre du problème.
2. Soit y la solution générale du problème. On pose $\tilde{y} = y - y_L$.
De quelle équation aux dérivées partielles \tilde{y} est-elle solution ? Donner les conditions au bord et la condition initiale pour \tilde{y} .
3. En déduire l'expression de \tilde{y} puis celle de y .

★ **Exercice 16. Tige métallique**

On considère une tige métallique de longueur 1 en contact à ses extrémités avec des milieux à 0. À l'instant initial, la tige est également à température nulle. On suppose de plus la présence d'une source de chaleur permanente. L'équation de la chaleur est alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C,$$

où C est une constante réelle positive liée à la source de chaleur.

1. Montrer que $T_L(x, t) = \frac{Cx(1-x)}{2c}$ est la solution à l'équilibre du problème.
2. Soit T la solution du problème. On pose $\tilde{T} = T - T_L$.
De quelle équation aux dérivées partielles \tilde{T} est-elle solution ? Donner les conditions au bord et la condition initiale pour \tilde{T} .
3. En déduire l'expression de \tilde{T} puis celle de T .

★ **Exercice 17.** On considère une plaque rectangulaire de longueur L_1 et de largeur L_2 dont les côtés sont en contact avec un milieu à 0. L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right).$$

1. On commence par identifier les solutions stationnaires, i.e. les solutions de la forme

$$T(x_1, x_2, t) = u(x_1)v(x_2)w(t).$$

En imitant la preuve en dimension 1, montrer que les solutions stationnaires sont définies pour chaque $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ par

$$T_{k_1, k_2}(x_1, x_2, t) = A \sin\left(\frac{k_1\pi}{L_1}x_1\right) \sin\left(\frac{k_2\pi}{L_2}x_2\right) \exp -ct \left(\frac{k_1^2\pi^2}{L_1^2} + \frac{k_2^2\pi^2}{L_2^2}\right).$$

2. On note $T_0(x_1, x_2)$ la répartition de la température à l'instant initial. Montrer que la solution du problème s'écrit

$$T(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}} A_{k_1, k_2} \sin\left(\frac{k_1\pi}{L_1}x_1\right) \sin\left(\frac{k_2\pi}{L_2}x_2\right) \exp -ct \left(\frac{k_1^2\pi^2}{L_1^2} + \frac{k_2^2\pi^2}{L_2^2}\right),$$

avec

$$A_{k_1, k_2} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} T_0(x_1, x_2) \sin\left(\frac{k_1\pi}{L_1}x_1\right) \sin\left(\frac{k_2\pi}{L_2}x_2\right) dx_1 dx_2.$$

On admettra la généralisation des coefficients de Fourier en dimension 2.

★ Exercice 18. Conduction thermique dans une boule

On considère une boule de rayon $r > 0$ initialement à température constante T_0 et dont le bord est mis en contact avec un milieu à température nulle. On suppose que l'évolution de la température dans la boule est invariante par rotation, i.e. la température $T(x, y, z, t)$ ne dépend que du temps t et du rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in [0, R]$.

Pour un conducteur homogène en trois dimensions, l'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

où $T(x, y, z, t)$ est la température du conducteur au point (x, y, z) à l'instant t et c est le coefficient de diffusivité thermique (constante positive). Dans notre cas particulier, où la température ne dépend que de r et de t , on note $T(r, t) = T(x, y, z, t)$ et on admet que l'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)$$

avec $r \neq 0$.

1. Soit T une solution stationnaire :

$$T(r, t) = u(r)v(t)$$

Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que u soit solution de l'équation différentielle

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) - \lambda u(r) = 0.$$

2. Pour $r \neq 0$, on pose $w(r) = ru(r)$. Montrer que w est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
3. En déduire l'expression de w puis celle de u .
4. En utilisant une limite connue, déterminer des solutions $u(r)$ définies en tout point $r \in [0, R]$.
5. Donner l'expression de $v(t)$ dans $T(r, t) = u(r)v(t)$, puis déterminer toutes les solutions stationnaires.
6. On suppose qu'à l'instant initial, la boule est à température constante T_0 . Montrer que la température à l'instant t et pour $r \neq 0$ est donnée par la fonction

$$T(r, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \left(k\pi \frac{r}{R} \right) \exp \left(-ct \frac{k^2 \pi^2}{R^2} \right),$$

avec pour tout k , $A_k = \frac{2T_0 R}{k\pi} (-1)^{k+1}$.

7. Application numérique 1.

On considère une boule en cuivre de rayon $R = 0,1m$. Son coefficient de diffusivité thermique est $c = 117 \cdot 10^{-6}m^2s^{-1}$. A l'instant initial la boule est à 100° puis on la plonge dans un milieu à 0° . Donner une valeur approximative de la température au centre de la boule après $10s$.

8. Application numérique 2 : Âge de la Terre.

Dans les années 1860, Kelvin propose d'utiliser l'équation de la chaleur afin d'estimer l'âge de la Terre. Le modèle est le suivant : il considère la Terre comme une boule homogène originellement à température constante égale à $3000K$. Son refroidissement est dû aux échanges thermiques avec l'espace environnant qui lui est à $0K$. En observant la température actuelle de la Terre, il a pu évaluer la durée du refroidissement et ainsi en déduire l'âge de la Terre. Kelvin a mesuré une variation moyenne de température de 3 degrés lorsqu'on descend à $100m$ de profondeur. On estime c à $10^{-6}m^2.s^{-1}$ et R à $6 \cdot 10^6m$, et on note t_a l'âge de la Terre.

- a) Calculer à partir de l'expression de la question 7 le gradient de température $\frac{\partial T}{\partial r}(R, t_a)$ et en déduire que l'âge t_a de la Terre doit satisfaire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-ct_a \frac{k^2\pi^2}{R^2}) = 30.$$

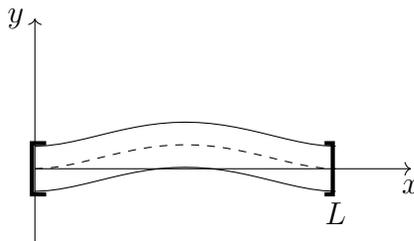
- b) A l'aide d'outils numériques, on peut résoudre cette équation et obtenir

$$t_a \approx 3.4 \cdot 10^{15}s.$$

En déduire l'âge de la Terre estimé par Kelvin et le comparer à l'estimation actuelle de 4,65 milliards d'années.

★ **Exercice 19. Vibration d'une poutre encastree**

On souhaite décrire les **modes propres** de vibration d'une poutre encastree afin d'en déduire son comportement lorsqu'elle est soumise à des vibrations extérieures. La modélisation de la vibration d'une poutre est plus difficile que celle de la corde vibrante car il faut intégrer toutes les forces internes que subit le matériau (torsion, flexion, cisaillement, etc).



Nous ne considérerons que les vibrations verticales de la poutre, supposées faibles, et nous noterons $y(x, t)$ la hauteur de la partie centrale de la poutre à l'abscisse x et à l'instant t . La longueur de la poutre est égale à $L = 10$ m, et la poutre est encastree en $x = 0$ et en $x = L$.

Le modèle le plus simple permettant de décrire le mouvement de la poutre est donné par l'équation d'Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Les conditions aux bords imposées par le double encastrement se traduisent par

$$y(0, t) = y(L, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0.$$

La recherche de modes propres correspond à l'étude des solutions stationnaires, on cherche donc à décrire les solutions de cette équation qui sont de la forme $y(x, t) = u(x)v(t)$.

1. Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que u soit de la forme

$$u(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x) + c_3 \cos(\alpha x) + c_4 \sin(\alpha x)$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes dans \mathbb{R} .

2. A l'aide des conditions au bord en 0, exprimer les constantes c_3 en fonction de c_1 et c_4 en fonction de c_2 .
3. En utilisant les conditions aux bords en L , exprimer c_2 en fonction de c_1 . Identifier les deux expressions et en déduire que nécessairement

$$\cosh(\alpha L) \cos(\alpha L) = 1.$$

4. A l'aide d'un ordinateur, déterminer que les six premières solutions de cette équation sont données par

$$\alpha_1 \simeq 0,47 \quad \alpha_2 \simeq 0,79 \quad \alpha_3 \simeq 1,10 \quad \alpha_4 \simeq 1,41 \quad \alpha_5 \simeq 1,73 \quad \alpha_6 \simeq 2,04$$

En déduire l'expression générale des fonctions u_i correspondantes, puis représenter le graphe des fonctions u_1, u_2 et u_3 .

5. Déterminer les fonctions v_i correspondantes aux fonctions u_i et conclure en donnant l'expression générale des solutions stationnaires du problème.