Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 1 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif qui désigne généralement $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1

Un **espace vectoriel** sur un corps $\mathbb{K}$ (un $\mathbb{K}$-ev) est un quadruplet $(E, +, \cdot, 0)$ où

- E un ensemble
- $0 \in E$ (élément neutre)
- $+ : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto x + y$ (loi interne additive)
- $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ (loi externe, multiplication par un scalaire)

et qui vérifie les huit axiomes suivants, pour $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

i. La loi + est commutative : $x + y = y + x$

ii. La loi + est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. L'élément neutre 0 vérifie $0 + x = x + 0 = x$

iv. Pour tout $x \in E$, il existe $-x \in E$ tel que $x + (-x) = 0$ (**opposé** ou **symétrique**)

v. $1 \cdot x = x$

vi. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot u$

vii. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

viii. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

Vocabulaire. Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**. Habituellement, on note la loi $\cdot$ par une simple juxtaposition : $\lambda \cdot x = \lambda x$. De même, on omet souvent de préciser les lois d'un espace vectoriel en écrivant simplement "le $\mathbb{K}$-ev E".

Remarque. Pour différencier l'élément neutre 0 de $\mathbb{K}$ de celui de E, on note parfois $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E.

Exemple 1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev et un $\mathbb{Q}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev et un $\mathbb{R}$-ev.

Exemple 2. (*Fondamental : l'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev. On écrit $x \in \mathbb{K}^n$ sous la forme d'une matrice-colonne avec ses coordonnées :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Les deux lois sont alors données par

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\lambda\cdot x=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on se permettra souvent d'écrire $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ en ligne et non en colonne.

Exemple 3. (*Espace des matrices*)
L'espace des matrices de taille $n\times m$ est un $\mathbb{K}$-ev avec l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire $\lambda(a_{i,j})=(\lambda a_{i,j})$. Par exemple, l'espace des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans K défini par

$$\mathcal{M}_2(K)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in\mathbb{K}\right\}$$

peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en posant

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}\\\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

pour la loi additive et la multiplication par un scalaire $\lambda\in K$, avec comme élément neutre la matrice nulle $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et l'opposé d'un élément $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$.

Exemple 4. (*Espace des polynômes*)
L'espace $\mathbb{K}[X]=\{\sum_i a_iX^i\mid a_i\in\mathbb{K}\}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel via les deux lois suivantes : si $P=\sum_i p_iX^i, Q=\sum_i q_iX^i\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors

$$P+Q=\sum_i(p_i+q_i)X^i \text{ et } \lambda P=\sum_i\lambda p_iX^i.$$

Exemple 5. (*Espace des fonctions*)
Pour A un ensemble quelconque, on note $\mathbb{K}^A=\{f:A\longrightarrow\mathbb{K}\}$ l'ensemble des fonctions de A) valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel pour les deux lois suivantes :

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

et le neutre est la fonction nulle $0:x\longmapsto 0$. Par exemple, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}^I=\{f:I\longrightarrow\mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel des fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6. (*Espace des suites*)
On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\{u_n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{K}\}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espaces vectoriel pour les deux lois suivantes :

- $(u+v)_n=u_n+v_n$
- $(\lambda u)_n=\lambda u_n$

et le neutre est la suite nulle $0_n=0$ pour toute entier $n\in\mathbb{N}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

i. $\forall x, y, z \in E$, si $x + y = x + z$, alors $y = z$

ii. $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_{\mathbb{K}}$

iii. $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, si $\lambda x = 0$, alors $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0$.

Démonstration.

i. x possède un opposé noté $-x$, donc il suffit d'ajouter x dans les deux membres de l'équation.

ii. $1 = 1 + 0$ donc $1 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x$ et $0 = 0 \cdot x$. De même, $0 = 0 + 0$ donc $\lambda(0+0) = \lambda 0$ et $\lambda 0 + \lambda 0 = \lambda 0$ et donc $\lambda 0 = 0$.

iii. si $\lambda x = 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors λx possède un inverse noté $\frac{1}{\lambda}$ pour le produit : $\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda x = \frac{1}{\lambda} \cdot 0$ et donc $x = 0$. Sinon, $\lambda = 0$.

□

1.2 Espaces vectoriels produits

Rappel : Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des ensembles, alors l'**espace produit** est défini par

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{F}\}.$$

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'espace produit défini par $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est naturellement muni d'une somme (interne) et d'un produit (externe) : pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ et λ un scalaire, on a

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$
$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \tag{2}$$

Proposition 3

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, alors $E \times F$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration. La structure d'espace vectoriel sur $E \times F$ est induite de la loi additive et de la multiplication par un scalaire définie par (1) et (2), l'élément neutre étant $(0_E, 0_F)$ et l'opposé d'un élément $(x, y) \in E \times F$ est $(-x, -y)$. □

Corollaire 4

L'espace produit $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev. Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'espace produit $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et x et y deux éléments de E.

i. x et y sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.

ii. une **combinaison linéaire** de x et y est un vecteur $z = \lambda x + \mu y$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Définition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors F est un **sous-espace vectoriel** de E (sev) si :

i. $0_E \in F$

ii. Pour tous $x, y \in F$, $x + y \in F$ (stable par la loi additive $+$) ;

iii. Pour tous $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$ (stable par la multiplication par un scalaire $\cdot$).

Remarque. L'hypothèse $0_E \in F$ peut être remplacée par l'hypothèse $F \neq \emptyset$. En effet, si $F \neq \emptyset$, alors il existe $x \in F$. Or $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ donc en particulier pour $\lambda = -1$, $-x \in F$ et $\forall y \in F$, $x + y \in F$. De même, pour $y = -x$, $x - x = 0_E \in F$.

Proposition 7

Soient F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E et $w = \lambda x + \mu y$ une combinaison linéaire d'éléments de F. Alors, $w \in F$. Plus généralement, si $w = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ est une combinaison linéaire de n éléments de F, alors $w \in F$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition précédente. □

Vocabulaire. On dit qu'une partie F de E est un sev de E ***ssi*** $0_E \in F$ ou $F \neq \emptyset$ (point i.) et F est **stable par combinaison linéaire** (points ii. et iii.).

Proposition 8 (Fondamentale)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Si F est un sev de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration. Les caractéristiques de E comme $\mathbb{K}$-ev restent vraies sur F : l'élément neutre de F est celui de E ($0_E \in F$) et la loi additive $+$ sur F est induite par celle de E. L'action de $\mathbb{K}$ sur F est la même que celle sur E.

i. L'associativité de la loi additive dans F se déduit de l'associativité dans E.

ii. On a évidement $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in F$.

iii. Pour $\lambda = -1$, alors $\forall x \in F$ on a $\lambda x \in F$ donc l'opposé de tout élément de F est aussi dans F.

iv. La loi $+$ reste commutative dans F.

v. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot u$

vi. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

vii. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

viii. $1 \cdot x = x$ $\square$

Méthode : d'après la propriété précédente, pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-ev, on n'utilisera quasiment jamais la définition 1 : en effet il suffira de montrer que F est une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E et on montrera que $0_E \in F$ (ou que $F \neq \emptyset$) et que F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 7. (*Droite vectorielle*)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in E$ non nul. L'ensemble F défini par

$$F = \{x \in E,\ \exists a \in \mathbb{K},\ x = au\}$$

est un sev de E (on dit que F est le sev de E *engendré* par le vecteur u). En effet :

i. F est non vide car par définition $u \in F$ (prendre $a = 1$)

ii. soient x et y dans F. Par définition, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $x = au$ et $y = bu$. Alors,

$$x + y = au + bu = (a + b)u \in F$$

donc F est stable par addition

iii. soient $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, il existe $a \in K$ tel que $x = au$, donc

$$\lambda x = \lambda(au) = (\lambda a)u \in F$$

donc F est stable par multiplication par un scalaire.

Exemple 8. (*Plan vectoriel*)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u, v \in E$ non nul. L'ensemble F défini par

$$F = \{x \in E,\ \exists a \in \mathbb{K},\ x = au + bv\}$$

est un sev de E (on dit que F est le sev de E *engendré* par les vecteurs u et v). En effet :

i. F est non vide par définition (il contient u et v).

ii. soient $x, y \in F$, alors par définition ils s'écrivent $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, et donc

$$x + y = (au + bv) + (cu + dv) = (a + c)u + (b + d)v \in F.$$

iii. soient $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut écrire $x = au + bv$ et donc

$$\lambda x = \lambda(au + bv) = (\lambda a)u + (\lambda b)v \in F$$

donc F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 9. (*Hyperplan*)
L'ensemble $F = \{(u_1, \ldots, u_n) \mid \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \text{ où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.

i. $(0, \ldots, 0) \in F$ par définition de F.

ii. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de F. Par définition de F, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n &= 0 \\ \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \ldots + \lambda_n(x_n + y_n) = 0, \text{ soit } x + y \in F.$$

iii. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$. A nouveau, par définition de F,

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

et donc

$$\lambda_1(\lambda x_1) + \ldots + \lambda_n(\lambda x_n) = 0, \text{ soit } \lambda x \in F.$$

Exemple 10. (*Noyau d'une matrice*)
Prenons $E = K^n$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble F défini par

$$F = \{X \in E,\ AX = 0\}$$

est un sev de E appelé **noyau de** A. En effet :

i. $0_E = (0, \ldots, 0) \in F$ $(A0_E = 0)$

ii. Soient $X, Y \in F$. Vérifions que $X + Y \in F$:

$$A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0.$$

iii. Soient $X \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Vérifions que $\lambda X \in F$:

$$A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda 0 = 0$$

donc F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 11. (*Espaces de fonctions*)
Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble F de E défini par

$$F = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } f(1) = 0\}$$

est un sev de E. En effet :

i. La fonction nulle (l'élément neutre ici) $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ quelque soit x est continue et, par définition, $f_0(1) = 0$ donc $f_0 \in F$.

ii. Soient f et g dans F. Par définition, f et g sont continues sur $[0,1]$ et $f(1) = g(1) = 0$. Alors, $f + g$ est continue comme somme de fonctions continues et

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

donc $f + g \in F$.

iii. soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in F$. Alors, λf est également continue et

$$(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

et donc $\lambda f \in F$.

Ainsi, $\forall f, g \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g \in F$ (*ie* F est stable par combinaison linéaire), et on a bien montré que F est un sev du $\mathbb{K}$-ev E.

Exemple 12. (*Contre-exemple*)
L'ensemble F défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 1\}$$

n'est **pas** un sev de $E = \mathbb{R}^3$. En effet, on a bien $F \subset \mathbb{R}^3$ mais $(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ n'appartient pas à F.

2.2 Intersections de sous-espaces vectoriels

Proposition 9

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Alors, $F \cap G$ est un sev de E.

Démonstration. F et G sont tous les deux des sev de E, donc en particulier $F, G \subset E$ et donc $F \cap G \subset E$. Ensuite, on a :

i. $0_E \in F$, $0_E \in G$ et donc $0_E \in F \cap G$.

ii. Soient $x, y \in F \cap G$. Alors, en particulier x et y sont dans F, or F est un sev de E donc par définition $x + y \in F$. De même, $x, y \in G$ et G est un sev de E donc $x + y \in G$ et ainsi $x + y \in F \cap G$.

iii. Soient $x \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors à nouveau $x \in F$ et $x \in G$ donc par définition $\lambda x \in F$ et $\lambda x \in G$ et donc $\lambda x \in F \cap G$.

$\square$

Corollaire 10

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sev de E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un sev de E.

Corollaire 11

Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un sev de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 13. L'ensemble F donné par les solutions du système $\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$, c'est à dire défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0,\ x + y = 0\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^3$, comme intersection des deux sev $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

Remarque. En général, la réunion de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

→ **Contre-exemple :** les deux ensembles $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ sont deux espaces vectoriels, mais leur réunion $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid xy = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel, puisque l'élément $w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est pas dans $F \cup G$. En fait, l'ensemble $F \cup G$ n'est pas stable par la somme en général.

2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 12

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble

$$\{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$$

des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E. On le note $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Démonstration. Comme E est un $\mathbb{K}$-ev, alors par définition il est stable par combinaison linéaire. Autrement dit, tout élément de la forme $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $u_i \in E$ est un élément de E, et donc l'ensemble $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ est bien un sous-ensemble de E. De plus, on a :

i. $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_p$ donc $0_E \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

ii. Si x et y sont deux éléments de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, alors on a

$$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \text{ et } y = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_p u_p$$

et donc $x + y = (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)u_p$ est bien un combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, soit $x + y \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

iii. Si $x \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ par définition et donc

$$\lambda x = (\lambda\lambda_1)u_1 + \ldots + (\lambda\lambda_p)u_p$$

donc λx est bien une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, soit $\lambda x \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

□

Définition 13

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$$

est appelé **espace vectoriel engendré par** $u_1, \ldots, u_p$.

Exemple 14. On a vu dans la partie précédente que l'ensemble F défini par les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

est un sev de $\mathbb{R}^3$ (comme intersection de deux sev). On va voir qu'on peut l'écrire comme $\mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u \in F$, c'est à dire qu'il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par $u \in F$. En effet, le système nous dit que $x = -y$, donc $-3y + z = 0 \Leftrightarrow 3y = z$. On peut donc réécrire le système précédent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ y & = & y \\ z & = & 3y \end{array} \right.$$

Ainsi, un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appartient à F s'il est de la forme $(-y, y, 3y)$, avec $y \in \mathbb{R}$, soit de la forme $y \times (-1, 1, 3)$ avec $y \in \mathbb{R}$. Notons $u = (-1, 1, 3)$. On obtient alors que l'ensemble F des solutions du système de départ est en fait donné par

$$F = \{y \times (-1, 1, 3),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(-1, 1, 3) = \mathrm{Vect}\,(u).$$

Il s'agit donc de la droite de vecteur directeur u, ou encore la **droite vectorielle engendrée par** u.

2.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires et somme directe

Définition 14

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. La **somme** de F et G est définie par

$$F + G = \{x + y \in E \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Proposition 15

Si F et G sont deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E, alors $F + G$ est un sev de E.

Démonstration. Par définition, $F + G \subset E$. Ensuite, on a :

i. $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

ii. Soient x et y deux vecteurs de $F + G$. Comme ils sont chacun dans $F + G$, ils se décomposent sous la forme $x_1 + x_2$ et $y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$. Comme F et G sont chacun des sev, leur somme $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ est donc dans $F + G$.

iii. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F + G$. L'élément x s'écrit par définition $x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, et donc

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in F + G.$$

□

Proposition 16

Si $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_q)$, alors $F + G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$.

Démonstration. On montre le résultat par **double inclusion**.

$\subset$ Soit $w \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$. Par définition,

$$w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q = (\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p) + (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q)$$

donc $w \in F + G$, soit $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q) \subset F + G$.

$\supset$ Soit $w \in F + G$. Par définition, $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Or, $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ donc il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ (u est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$). De même, $v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q$ et ainsi

$$w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q,$$

soit $w \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ et donc $F + G \subset \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$, ce qui donne l'égalité.

□

Exemple 15. Soient $F = \text{Vect}\,(u_1)$ avec $u_1 = (1, 0, 1)$ et $G = vect(u_2)$ avec $u_2 = (1, -1, -1)$ deux droites de $\mathbb{R}^3$. Alors, $F + G = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ est le plan engendré par les deux vecteurs u_1 et u_2.

Définition 17

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. On dit que F et G sont en **somme directe** dans E si tout vecteur x de E se décompose de manière **unique** sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. On note alors $E = F \oplus G$. On dit aussi que F est un **supplémentaire** de G dans E, et vice-versa.

Proposition 18

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E.

$$E = F \oplus G \;\; \textbf{\textit{ssi}} \;\; E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}.$$

Démonstration.

⇒ **(Condition nécessaire)** Supposons $E = F \oplus G$. Montrons que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

i. Par hypothèse, tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ donc en particulier une telle décomposition **existe** pour tout vecteur $x \in E$, donc par définition $E = F + G$.

ii. Vérifions que $F \cap G = \{0\}$. Comme $F \cap G$ est un sev de E (cf proposition 9), il contient l'élément nul donc $\{0\} \in F \cap G$. Soit $x \in F \cap G$, il faut donc montrer que $x = 0$. Par définition, $x \in F$ et $x \in G$. De plus, $x = x + 0 = 0 + x \in F + G$ et comme par hypothèse $E = F \oplus G$, on a unicité de la décomposition donc en fait $x = 0$ et $F \cap G \subset \{0\}$, ce qui donne l'égalité $F \cap G = \{0\}$.

⇐ **(Condition suffisante)** Supposons $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Montrons que F et G sont en somme directe dans E. Soit $x \in E$: vérifions qu'il s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $g \in G$. Par hypothèse, $E = F + G$ donc une telle écriture **existe**. Montrons qu'elle est unique. Supposons qu'il existe deux telles décompositions : $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y_1 + z_1 \\ x & = & y_2 + z_2 \end{array} \right.$ avec $y_1, y_2 \in F$ et $z_1, z_2 \in G$. Alors,

$$0 = (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) = (y_1 - y_2) - (z_1 - z_2)$$

et donc $\overbrace{y_1 - y_2}^{\in F} = \overbrace{z_1 - z_2}^{\in G}$. Comme ils sont égaux, ils sont dans $F \cap G$. Or, par hypothèse $F \cap G = \{0\}$ donc en fait

$$y_1 - y_2 = 0 = z_1 - z_2$$

soit $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$, donc finalement la décomposition est **unique** et $E = F \oplus G$.

□

Exemple 16. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la droite vectorielle $F = \text{Vect}\,(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et le plan G d'équation $x + y + z = 0$ sont en somme directe :

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $v = (x, y, z) \in F \cap G$. Comme $v \in F$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = a \times (1, 1, 1) = (a, a, a)$$

et comme $v \in G$, on a $a + a + a = 3a = 0$, donc $a = 0$ et $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit $F \cap G = \{0\}$.

- Montrons que $E = F + G$. Remarquons d'abord que le plan G est engendré par les deux vecteurs $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$. En effet, un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à G s'il vérifie l'équation $x + y + z = 0$, c'est à dire $x = -y - z$. Autrement dit,

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y \times (-1, 1, 0) + z \times (-1, 0, 1)$$

ce qui signifie bien que $G = \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$. Ainsi, d'après la proposition 16, on a

$$F + G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Prenons $x \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3). On cherche donc $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. D'après ce qui précède, il suffit donc de trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $x = au + bv + cw$, et on aura $y = au \in F$ et $z = bv + cw \in G$. On écrit donc le système

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

et, en inversant la matrice, on obtient l'écriture

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\1/3 & -2/3 & 1/3\\1/3 & 1/3 & -2/3\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

et ainsi on obtient les scalaires a, b, c

$$\begin{cases} a &= 1/3x_1 + 1/3x_2 + 1/3x_3\\ b &= 1/3x_1 - 2/3x_2 + 1/3x_3\\ c &= 1/3x_1 + 1/3x_2 - 2/3x_3\end{cases}$$

donc on a bien écrit $x \in E$ comme somme d'un élément de F (au) et d'un élément de G $(bv + cw)$ avec a, b et c définis comme ci-dessus, ce qui signifie que $E = F + G$.

Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 2 : Familles libres, familles génératrices, bases

Dans tout le chapitre, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1 Indépendance linéaire

1.1 Définitions et premiers exemples

Vocabulaire. On appelle **famille de vecteurs** toute collection (éventuellement infinie) de vecteurs de E. On les note généralement $(u_1, \dots, u_n) \in E$.

Définition 1

Une famille finie de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$
- $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont **linéairement dépendants**.

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 1)$ et $u_3 = (-1, 13, 5)$ est liée puisque $2u_1 + 3u_2 - u3 = 0$ et que $(2, 3, -1) \neq (0, 0, 0)$.

Définition 2

Une famille finie de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est à dire que pour toute famille de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ et toute combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$, on a $\lambda_i = 0$ pour tout i.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont **linéairement indépendants**.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 5)$ est libre. En effet, supposons qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. On aurait alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

et donc on voit bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, soit la famille (u_1, u_2, u_3) est bien libre.

Méthode : Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs.

i. Pour montrer que cette famille est **liée**, trouver des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$, ou bien simplement montrer qu'elle n'est pas libre.

ii. Pour montrer que cette famille est **libre**, considérer une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ et vérifier que $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Remarques. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre.

i. Pour tout i, $u_i \neq 0$. En effet, supposons par exemple que $u_1 = 0$. Dans ce cas, $1u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n = 0$ et$(1, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ donc $u_1, \ldots, u_n$ serait liée. **Contradiction.**

ii. Pour tous $i \neq j$, $u_i \neq u_j$. En effet, supposons par exemple que $u_1 = u_2$, alors la famille serait liée. **Contradiction.**

Autrement dit, une famille libre ne peut contenir le vecteur nul ni deux fois le même vecteur.

1.2 Propriétés sur les familles libres et les familles liées

Proposition 3

Deux vecteurs u et v non nuls forment une famille libre ***ssi*** ils sont non colinéaires.

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un même espace vectoriel.

$\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que la famille (u, v) soit libre. Par l'absurde, supposons maintenant que u et v soient colinéaires. Alors, par définition il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$ tel que

$$u = \lambda v \Leftrightarrow u - \lambda v = 0.$$

On a ainsi trouvé une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ de u et v, avec $\lambda_1 = 1 \neq 0$ et $\lambda_2 = \lambda \neq 0$, donc la famille (u, v) est liée, ce qui est absurde. Ainsi, u et v ne peuvent pas être colinéaires.

$\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que u et v soient non colinéaires. Pour montrer que la famille (u, v) est libre, prenons une combinaison linéaire nulle de u et v :

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0.$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$ et donc u et v sont colinéaires, ce qui est absurde par hypothèse. De même, si $\lambda_2 \neq 0$, on a $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} u$ et donc à nouveau u et v sont colinéaires. Finalement, le seul cas possible est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et donc la famille (u, v) est bien libre.

$\square$

Remarque. De la même façon, une famille de trois vecteurs (u, v, w) est libre s'ils sont non coplanaires, ce qui se traduit par $\det A \neq 0$, où A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u, v et w.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i. (x) est une famille libre de E ***ssi*** $x \neq 0$.

ii. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

iii. Toute famille contenant une famille liée est liée.

iv. Toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ dont l'un des vecteurs u_i est nul est liée.

Démonstration. i. Rappelons qu'on a vu dans le chapitre 1 que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x = 0_E$ implique $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$. Supposons alors que la famille (x) soit libre. Alors, si $\lambda x = 0$ on a par définition $\lambda = 0$ et donc $x \neq 0$. De même, si $x \neq 0$ et si $\lambda x = 0$ est une combinaison linéaire nulle de x, alors $\lambda = 0$ et donc $(x) = 0$ est bien libre.

ii. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre et $\mathcal{F}$ une sous-famille de celle-ci. Alors, à renumérotation près, on a $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_k)$ avec $k \leq p$. Si $\mathcal{F}$ était liée, alors l'un des vecteurs de $(v_1, \ldots, v_k)$ est combinaison linéaire des autres et donc par extension il existe un des vecteurs de $(u_1, \ldots, u_p)$ qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres, ce qui signifie que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée. **Contradiction.**

iii. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille liée et $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ une famille qui la contient (à renumérotation près). Alors, par définition l'un des vecteurs de $(u_1, \ldots, v_p)$ est combinaison linéaire de tous les autres, donc par extension l'un des vecteurs de $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est combinaison linéaire de tous les autres, donc cette famille est liée.

iv. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ contient un vecteur nul, disons u_i, alors d'après i. il contient une famille liée et donc d'après d'après iv. cette famille est aussi liée.

□

Proposition 5

La famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée ***ssi*** il existe un indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que u_k est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$, c'est à dire que l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire de tous les autres.

Démonstration.

$\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ liée. Alors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. En particulier, il existe $\lambda_k \in (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ non nul tel que

$$\lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n,$$

soit en divisant par λ_k, u_k est bien combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$.

$\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons qu'il existe un indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u_k = \sum\limits_{i \neq k} \lambda_i u_i$. Alors, on a

$$\sum_{i \neq k} (\lambda_i u_i) - u_k = 0 \Longleftrightarrow \sum_i \lambda_i u_i = 0 \text{ avec } \lambda_k = -1$$

et en particulier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ donc la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est bien liée.

□

Remarque. La proposition précédente nous dit que lorsqu'une famille de vecteurs est liée, alors forcément l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. Attention, ce n'est pas forcément vrai pour n'importe lequel des vecteurs de la famille.

$\rightarrow$ **Contre-exemple :** dans $E = \mathbb{R}^2$ et en notant $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$ vecteurs "origines", si on considère $u = 2i = (2, 0)$ alors la famille (i, j, u) est liée $(u = 2i + 0j)$. Ainsi, i est combinaison linéaire de (u, j), u est combinaison linéaire de (i, j) mais j n'est pas combinaison linéaire de (i, u).

Proposition 6

Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre et $v \in E$. Alors, v est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_n$ ***ssi*** la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que v soit une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \neq (0, \ldots, 0, 0)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n - \mu v = 0$$

  et donc la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée.
- $\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ soit liée. Par définition, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \neq (0, \ldots, 0, 0)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \mu v = 0 \tag{1}$$

  Remarquons que $\mu \neq 0$. En effet, si $\mu = 0$ alors on aurai $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ et comme par hypothèse $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, alors $\lambda_i = 0$ pour tout i, donc dans ce cas on aurait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) = (0, \ldots, 0, 0)$, ce qui est contradictoire. Ainsi, l'égalité (1) devient

$$-\mu v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

  et en divisant par $\mu \neq 0$, on obtient

$$v = \left(\frac{1}{-\mu}\right)(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)$$

  donc v est bien combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

$\square$

2 Base et dimension

2.1 Base d'un espace vectoriel

Définition 7

Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de E est une famille **génératrice** si $E = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, autrement dit si pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.

Vocabulaire. Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice **finie**. Sinon, on dit que qu'il est de **dimension infinie**.

Remarque. Une telle famille n'existe pas toujours, par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'admet aucune famille génératrice En effet, supposons par l'absurde que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie : alors, il existe $(P_1, \ldots, P_k)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Notons $N = \max(\deg P_i,\ i = 1, \ldots, N)$ le maximum des degrés des P_i et prenons Q un polynôme de degré $N + 1$. Alors, $Q \in \mathbb{R}[X]$ donc il devrait s'écrire comme une combinaison linéaire des $(P_1, \ldots, P_k)$, mais comme $\deg P_i \leq N$ pour tout i, ceci n'est pas possible, donc $(P_1, \ldots, P_k)$ n'engendre pas $\mathbb{R}[X]$. **Contradiction**.

Exemple 3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, la famille (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$ est une faille génératrice. En effet, tout élément $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se décompose comme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$. Cet exemple se généralise à $\mathbb{R}^n$: la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, où $u_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ rang}}, 0, \ldots, 0)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 8

Toute famille du $\mathbb{K}$-ev E contenant une famille génératrice est elle-même génératrice.

Démonstration. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice et $\mathcal{F}$ une famille qui la contient. Alors, à renumérotation près, on a $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$, avec $v_i \in E$. Soit x un élément de E. Alors, $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$, mais on peut aussi écrire

$$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + 0v_1 + \ldots + 0v_q$$

donc $\mathcal{F}$ est génératrice. $\square$

Définition 9

Une famille de vecteurs de E forme une **base** de E si elle est à la fois **libre** et **génératrice**.

Remarque. Là encore, une telle famille n'existe pas toujours, mais on verra par la suite que c'est le cas sous de bonnes hypothèses sur l'espace vectoriel de départ.

Exemple 4. La famille (e_1, e_2) avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, on a vu dans l'exemple 3 qu'elle est génératrice, montrons alors qu'elle est également libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ une combinaison linéaire nulle de e_1, e_2. Alors,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

donc (e_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5. (*Base canonique de* $\mathbb{K}^n$)
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$, où $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ rang}}, 0, \ldots, 0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, on a déjà vu dans l'exemple 3 que cette famille est génératrice, montrons donc qu'elle est libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ une combinaison linéaire nulle de $e_1, \ldots, e_n$. Alors, on a

$$\begin{array}{rccl} & \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n(0, \ldots, 0, 1) & = & (0, \ldots, 0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \lambda_n) & = & (0, \ldots, 0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & = & (0, \ldots, 0) \end{array}$$

donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, d'où $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et donc elle forme bien une base de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 6. (*Base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$)
La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X] = \{P = a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ et } \deg P \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. En effet, par définition tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = a_0 1 + a_1 X + \ldots a_n X^n$ donc cette famille est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n = 0$$

une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors, le membre de gauche est un polynôme égal au polynôme nul, or par définition deux polynômes sont égaux ***ssi*** les coefficients de même degrés sont égaux, donc en fait $\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ et la famille est bien libre, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 7. (*Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)
Pour $n = 2$, on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de tailles 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notons $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la famille de matrices telles que

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ peut s'écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice. De plus, si

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0$$

est une combinaison linéaire nulle, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc en fait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre et forme donc bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Plus généralement, la famille de matrices $(E_1, ..., E_{n^2})$ où E_i est la matrice carrée de taille n avec tous les coefficients nuls sauf un, égal à 1 en position (i, i) forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 8. (*Base d'un sev défini par un système d'équations*)
Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}.$$

F est bien un sev comme *hyperplan* de $\mathbb{R}^3$. Cherchons donc une base de F. Pour cela, il faut réécrire l'équation $2x + y + 3z = 0$: par exemple, on peut écrire que

$$2x + y + 3z = 0 \iff y = -2x - 3z$$

donc en fait un vecteur $u = (x, y, z)$ est dans F ***ssi*** $y = -2x - 3z$, ce qui revient à dire que

$$u \in F \iff v = (x, -2x - 3z, z) \iff v = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$$

et ainsi, les deux vecteurs $e_1 = (1, -2, 0)$ et $e_2 = (0, -3, 1)$ forment une famille génératrice de F. Il reste montrer que (e_1, e_2) est bien libre. Pour cela, on écrit une combinaison linéaire nulle de e_1 et e_2 :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \iff (\lambda_1, -2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_2 = (0, 0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{rrcl} \lambda_1 & & = & 0 \\ -2\lambda_1 & -3\lambda_2 & = & 0 \\ & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et donc (e_1, e_2) est bien une base de F.

Proposition 10

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E ***ssi*** pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Autrement dit, tout vecteur x se décompose de façon unique sur les e_i.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E et prenons $x \in E$. Alors, par définition la famille est génératrice, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Montrons que cette décomposition est unique. Supposons pour cela qu'il existe $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ tels qu'on ait la même décomposition, *ie*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ x & = & \lambda'_1 e_1 + \ldots + \lambda'_n e_n \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & x - \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ 0 & = & x - \lambda'_1 e_1 + \ldots + \lambda'_n e_n \end{array} \right.$$

et en soustrayant les deux lignes, on obtient

$$0 = (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n$$

mais comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on a en fait $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout i, d'où l'unicité de la décomposition.

- $\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de E telle que tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i. Montrons que $\mathcal{B}$ forme une base de E. La famille est génératrice par hypothèse, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ une combinaison linéaire nulle des e_i. Alors, on peut écrire

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 = 0e_1 + \ldots + 0e_n$$

et donc par unicité de la décomposition, tous les λ_i sont nuls et $\mathcal{B}$ est bien une base de E.

$\square$

Remarque. Cette proposition permet de définir la notion de **coordonnées** : en effet, dire par exemple que u a pour coordonnées (a, b, c) dans la base (e_1, e_2, e_3) revient à dire que u se décompose de façon unique sous la forme $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Remarquons que si u et v sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors le vecteur $u + v$ a pour coordonnées $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. En effet, par définition, on a les deux décompositions suivantes pour u et v :

$$\begin{array}{rcl} u & = & a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \\ v & = & b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n \end{array}$$

donc on $u + v = (a_1 + b_1)e_1 + \ldots + (a_n + b_n)e_n$.

2.2 Existence de bases en dimension finie

Dans cette partie, on va voir qu'un espace vectoriel de dimension finie admet toujours une base. Pour cela, remarquons d'abord que si E est de dimension finie, alors E possède naturellement une famille génératrice (en effet, il suffit de considérer l'ensemble de tous les vecteurs de E). De même, si $E \neq \{0\}$, alors E possède au moins un vecteur non nul x et donc au moins une famille libre, en considérant la famille (x) (cf proposition i. 4).

Théorème 11 (Existence de base)

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimensions **finie** et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_k)$ une famille génératrice de E. Considérons une famille libre $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ de E. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Autrement dit, **dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe toujours des bases.**

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_k)$ une famille génératrice de E. Remarquons d'abord que si tous les g_i étaient nuls, alors $\forall x \in E$ on aurait $x = 0$, ce qui n'est pas possible puisqu'on a supposé $E \neq \{0\}$. Ainsi, au moins un des g_i est non nuls et on peut supposons à reunémoration près qu'il s'agit de g_1.
Posons alors $\mathcal{L}_1 = (g_1)$. Alors, comme $g_1 \neq 0$, d'après la proposition 4, la famille $\mathcal{L}_1$ est libre. Si elle était de plus génératrice, le théorème serait démontré. Supposons donc qu'elle ne soit pas génératrice et montrons dans ce cas qu'il existe $g_* \in (g_2, \ldots, g_k)$ tel que la famille (g_1, g_*) soit libre. En effet, si ce n'était pas le cas, alors pour tout $g_* \in (g_2, \ldots, g_k)$ la famille (g_1, g_*) serait liée, et donc en particulier tout vecteur de $(g_2, \ldots, g_k)$ serait combinaison linéaire de g_1, ce qui signifie qu'il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$g_2 = \lambda_2 g_1, \ldots, g_k = \lambda_k g_k.$$

Alors, en particulier pour tout élément $x \in E$, on a

$$x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k = \alpha_1 g_1 + (\alpha_2 \lambda_2) g_1 + \ldots + (\alpha_k \lambda_k) g_1 = \lambda g_1$$

donc tout élément $x \in E$ est combinaison linéaire de g_1, donc $\mathcal{L}_1 = (g_1)$ est génératrice. **Contradiction.** Ainsi, la famille (g_1, g_*) est libre et, à renumérotation près, on peut supposer $g_* = g_2$ et poser $\mathcal{L}_2 = (g_1, g_2)$. La famille $\mathcal{L}_2$ est donc libre dans E, et on montre alors de la même manière que pour $\mathcal{L}_1$ que la famille $\mathcal{L}_2$ est soit génératrice et le théorème est démontré, soit qu'elle peut être complétée en une famille libre $\mathcal{L}_3 = (g_1, g_2, g_3)$, et répéter alors ce même processus jusqu'à obtenir une famille $\mathcal{L}_n = (g_1, \ldots, g_n) \subset \mathcal{G}$ qui soit à la fois libre et génératrice. De plus, comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe un tel n, donc on finit bien par trouver une base $\mathcal{L}_n$ de E. □

Théorème 12 (Théorème de la base incomplète)

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie.

i. De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E, on peut extraire une base.

ii. Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E peut être complétée de manière à former une base.

Démonstration. i. C'est la preuve du théorème d'existence des bases en dimension finie.

ii. Soit $\mathcal{L}$ est une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, E admet une famille génératrice $\mathcal{G}$ (qui ne contient pas nécessairement $\mathcal{L}$). Notons $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$. Alors $\mathcal{G}'$ contient une famille génératrice, donc elle est elle-même génératrice (cf proposition 4). De plus, elle contient aussi une famille libre, et on peut appliquer le théorème d'existence des bases en dimension finie et ainsi la compléter de façon à en faire une base de E.

□

2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Le lemme suivant sert d'outils à la démonstration du théorème 14.

Lemme 13

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E constituée de n vecteurs. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille de p vecteurs de E avec $p > n$, alors cette famille est liée. Autrement dit, dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille contenant **strictement plus** de n éléments est liée.

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F}' = (f_1, \dots, f_p)$, avec $p > n$. On doit donc montrer que $\mathcal{F}'$ est liée. Pour cela, on va montrer que la sous-famille de $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathcal{F}'$ est génératrice, car dans ce cas, f_{n+1} sera combinaison linéaire des f_i pour tout $i \leq n$ et donc en particulier $(f_1, \dots, f_{n+1}) \subset \mathcal{F}'$ est liée, donc $\mathcal{F}'$ est aussi liée (cf iii. proposition 4). Soit donc $(f_1, \dots, f_n)$ sous-famille de $\mathcal{F}'$. Si l'un des f_i était nul, alors $\mathcal{F}'$ serait immédiatement liée (cf proposition i. 4). Supposons donc que $f_i \neq 0$ pour tout i : alors, comme $\mathcal{F}$ est génératrice, on aura

$$f_i = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \text{ pour tout } i.$$

Or $f_i \neq 0$ donc au moins l'un des λ_k est non nul, disons λ_1. Alors, en divisant par λ_1 on obtient

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1} e_1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} e_n\right)$$

donc tout élément $x \in E$ s'écrira comme combinaison linéaire des $f_1, e_2, \dots, e_n$, ce qui signifie que la famille $(f_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice. De même, on peut réitérer ce processus jusqu'à remplacer tous les e_i par les f_i, et ainsi obtenir que $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice, et donc la famille $\mathcal{F}'$ est bien liée. □

Théorème 14

Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors c'est le cas pour toutes ses bases.

Démonstration. Ce théorème se déduit immédiatement du lemme précédent : en effet, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, $\mathcal{B}$ est génératrice donc soit $\mathcal{B}'$ contient plus de vecteurs que $\mathcal{B}'$ et donc d'après le lemme précédent elle est liée. **Contradiction.**
De même, soit $\mathcal{B}$ contient plus d'éléments que $\mathcal{B}'$ qui est génératrice, et donc $\mathcal{B}$ est liée. **Contradiction.** □

Définition 15

Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors on dit que E est de **dimension** n.
On note $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ (on omet parfois de préciser $\mathbb{K}$ quand le contexte le permet).

Vocabulaire.

- Par convention, la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ est 0 : $\dim\big(\{0\}\big) = 0$. On a évidement $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$ ***ssi*** $E = \{0\}$.
- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé un **plan vectoriel**.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n et F est un sev de E tel que $\dim F = n - 1$, alors F est appelé un **hyperplan** de E.
- On appelle **rang de la famille** de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ la dimension de l'espace $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$.

Exemple 9. D'après l'exemple 5, l'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Exemple 10. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$. En effet, on a déjà vu dans l'exemple 6 que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et comme elle compte $n+1$ éléments, on a bien

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n + 1.$$

En revanche, on a vu que l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque. La dimension d'un espace vectoriel E dépend évidemment de E mais également du corps de base $\mathbb{K}$ (c'est pourquoi on la note souvent $\dim_{\mathbb{K}}$. En effet, $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-ev est de dimension 2, car tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique comme $z = a1 + bi$, et donc la famille $(1, i)$ en est une base. En revanche, si on considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors il est évidemment de dimension 1. Ainsi, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1.$$

Théorème 16

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

i. Toute famille ayant **plus** de n éléments est liée.
ii. Les familles ayant **moins** de n éléments ne peuvent être génératrices.
iii. Toute famille génératrice ayant **exactement** n éléments est une base.
iv. Toute famille libre ayant **exactement** n éléments est une base.

Démonstration.

i. C'est une reformulation du lemme 13.
ii. Si E possédait une famille génératrice $\mathcal{F}$ avec moins de n éléments, alors on pourra d'après le théorème 12 en extraire une base qui contiendrait donc moins de n éléments, ce qui est en contradiction avec le théorème 14.
iii. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrices de E constituée de n éléments. Alors, à nouveau d'après le théorème 12, on peut en extraire une base de E. Mais comme toute base de E contient n élément d'après le théorème 14, cette nouvelle base contient bien n éléments : il s'agit donc de $\mathcal{G}$ elle-même.
iv. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E constituée de n éléments. Alors, d'après le 12 on peut compléter cette famille de façon à en faire une base de E. Mais comme pour iii. cette base contient n éléments par le théorème 14, il s'agit donc de $\mathcal{L}$ elle-même.

□

Remarque. Les points iii. et iv. de la proposition précédente nous disent que, pour trouver une base d'un espace vectoriel E de dimension n, **il suffit de trouver une famille qui soit ou libre ou génératrice**.

Proposition 17

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels tous de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors, on a déjà vu que l'espace produit $E_1 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-ev. De plus, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \ldots + \dim_{\mathbb{K}} E_p.$$

Démonstration. Notons $(a_1, \ldots, a_{n_1})$, $(b_1, \ldots, b_{n_2})$, ..., $(k_1, \ldots, k_{n_p})$ respectivement des bases de $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Alors, on peut facilement vérifier que la famille

$$\big((a_i, 0, \ldots, 0)_{i=1,\ldots,n_1}, (0, b_i, 0, \ldots, 0)_{i=1,\ldots,n_2}, \ldots, (0, \ldots, 0, k_i)_{i=1,\ldots,n_p}\big)$$

est une base de $E_1 \times \ldots \times E_p$. □

3 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 18

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $F \neq \{0\}$ un sev de E. Alors, F est de dimension finie et de plus, on a :

i. $\dim F \leq n$

ii. $\dim F = n$ ***ssi*** $E = F$.

Démonstration.

i. Comme $F \neq \{0\}$, il existe $x_1 \in F$ avec $x_1 \neq 0$ et on peut considérer la famille $\mathcal{L}_1 = (x_1)$ de F. Alors, $\mathcal{L}_1$ est libre et, comme pour la preuve du lemme 13, on peut compléter (x_1) en une autre famille libre de F, notée $\mathcal{L}_2 = (x_1, x_2) \supsetneq \mathcal{L}_1$, et ainsi construire une suite de familles libres de F telles que

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_3 \subsetneq \ldots \subsetneq F$$

jusqu'à obtenir une famille libre $\mathcal{L}_k$ qui soit génératrice de F. On a ainsi l'existence d'une famille libre et génératrice de F, mais il faut également montrer que celle-ci est finie (pour avoir que $\dim F < \infty$). Or, supposons que F n'admet pas de famille génératrice finie : alors, il existerait une famille génératrice infinie dans F, mais donc dans E également, qui est de dimension finie. **Contradiction.** Ainsi, F admet une famille libre et génératrice **finie** : F est donc de dimension finie et admet une base. Par ailleurs, on a vu qu'une base de F est toujours constituée d'au plus n éléments, donc $\dim F \leq \dim F$.

ii. Si $\dim F = \dim E$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F constituée de n éléments. Or $F \subset E$ donc $\mathcal{B}$ est une famille de E, libre et constituée de n éléments : c'est donc une base de E (cf théorème 16. Ainsi, $\mathcal{B}$ engendre E et F, donc $E = F$. Réciproquement, si $E = F$, alors on a évidemment $\dim F = \dim E$.

□

Théorème 19

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F, G deux sev de E de bases respectives $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_q)$, avec $p, q \geq 1$ (F et G différents de $\{0\}$). Alors,

$$E = F \oplus G \;\; \textbf{\textit{ssi}} \;\; (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q) \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.

⇒ **Condition nécessaire.** Supposons que F et G soient en somme directe dans E (*ie* $E = F \oplus G$). Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E.

i. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre : soit

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$$

une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{B}$. Alors,

$$\underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{\in F} = \underbrace{-\mu_1 g_1 - \ldots - \mu_q g_q}_{\in G}$$

donc chaque membre de cette égalité appartient à la fois à F et à G, donc à $F \cap G$. Or par hypothèse $F \cap G = \{0\}$, donc en fait

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = 0 \text{ et } \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$$

qui sont des combinaisons linéaires nulles d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, qui sont des familles libres, donc par définition

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \text{ et } \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

ii. Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice : soit $w \in E$. Comme F et G sont en somme directe dans E, on a en particulier $E = F + G$ donc w s'écrit comme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. De plus, $\mathcal{F}$ est une base de F donc u est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$, et de même v est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$. Ainsi, w est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est bien génératrice.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E.

$\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E, et montrons que $E = F \oplus G$.

i. Montrons que $F \cap G\{0\}$. Soit u un élément de l'intersection. Alors,

$$\begin{array}{lcl} u \in F & \iff & u = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p \\ u \in G & \iff & u = \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q \end{array}$$

donc en soustrayant les deux lignes on obtient la combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{B}$

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p - \mu_1 g_1 - \ldots - \mu_q g_q = 0.$$

Or $\mathcal{B}$ est libre, donc $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, soit $u = 0$, et donc $F \cap G\{0\}$.

ii. Montrons que $E = F + G$. Soit $w \in E$. Alors, comme $\mathcal{B}$ est une base de E on a

$$w = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{u \in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q}_{v \in G}$$

donc $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, donc $E = F + G$.

Ainsi, F et G sont bien en somme directe dans E.

$\square$

Corollaire 20

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors, tout sev de E admet un supplémentaire dans E.

Démonstration. Soit F un sev de E. Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Alors, le théorème de la base incomplète 12 nous dit qu'on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E, qu'on note $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$, avec $q = n - p$ et les g_i choisis parmi les e_i. Notons $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_q)$ le sev de E engendré par les g_i. Alors, $(g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre de E, puisqu'elle est extraite d'une famille libre, et elle est génératrice de G par définition : $(g_1, \ldots, g_q)$ est donc une base de G. Alors, d'après le théorème précédent, $E = F \oplus G$ donc G est un supplémentaire de F dans E. $\square$

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire d'une droite (dimension 1) est un plan (dimension 2).

Théorème 21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F, G deux sev de E. On a

i. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (**Formule de Grassman**)

ii. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration.

i. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de de E. Comme F et G sont tous deux sev de E, alors $F \cap G$ en aussi un : à renumérotation près, posons $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $F \cap G$.
   - $F \cap G \subset F$ donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de F tels que $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p)$ soit une base de F. De même, $F \cap G \subset G$ donc il existe $(g_1, \ldots, g_q)$ des éléments de G tels que $(e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_q)$ soit une base de G. En particulier, on a

$$\dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = f + g - 2k - k = f + g + k.$$

   - Montrons maintenant que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $F + G$.
     (a) Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_p f_p + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0.$$

     Or $\gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q \in G$ donc $\gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0$, soit $\gamma_1 = \ldots = \gamma_q = 0$. De même, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ et $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$ et la famille $\mathcal{B}$ est libre.

     (b) Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Par définition, on a $F \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$ et $G \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$, donc par stabilité $F + G \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$. De même, on a clairement $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) \subset F + G$ donc par double inclusion, on a l'égalité $F + G = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}$ est génératrice.

   Ainsi, on a montré que $\mathcal{B}$ est une base de $F + G$, donc

$$\dim(F+G) = f + k + g = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

ii. Si $E = F \oplus G$, alors $F \cap G = \{0\}$ donc $\dim(F \cap G) = 0$ et on a l'égalité.

□

Corollaire 22

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

i. Si F et G sont deux sev de E, alors

$$E = F \oplus G \ \ \textit{\textbf{ssi}} \ \ F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim E = \dim F + \dim G.$$

ii. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sev de E, alors

$$\dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim E_1 + \ldots + E_p.$$

Démonstration. Le premier point découle directement de la formule de Grassman, car si F et G sont en somme directe alors $\dim(F \cap G) = 0$ puisque $F \cap G = \{0\}$. Le deuxième point est une récurrence sur le théorème précédent. □

Exemple 12. A la fin du chapitre 1, on a vu que la droite vectorielle $F = \text{Vect}\,(u)$ avec $u = (1,1,1)$ et le plan G d'équation $x + y + z = 0$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$. Avec la caractérisation du corollaire précédent, la preuve est beaucoup plus rapide : en effet, une fois qu'on a montré que $F \cap G = \{0\}$ ($v = (x,y,z) \in F \cap G$., alors $v \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = a \times (1,1,1) = (a,a,a)$ et comme $v \in G$, on a $a + a + a = 3a = 0$, soit $a = 0$ et $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où $F \cap G = \{0\}$), il suffit de dire que $\dim F = 1$ et $\dim G = 2$, donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$, et on a bien $E = F \oplus G$.

Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 3 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, on considère des espaces vectoriels de **dimension finie** sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** si pour tous vecteurs u et v dans E et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

i. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
ii. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, et parfois simplement $\mathcal{L}(E,F)$, l'**ensemble des applications linéaires de E dans F**.

Remarque. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors on a $f(0) = 0$. En effet, on a

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Vocabulaire.

- Si f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ ($f : E \to \mathbb{K}$), alors on dit que f est une **forme linéaire**. On note $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
- Si f est une application linéaire de E dans E ($f : E \to E$), alors on dit que f est un **endomorphisme linéaire** de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E.

Proposition 2

Une application $f : E \to F$ est linéaire ***ssi*** $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Démonstration. C'est simplement une réécriture de la définition. □

Exemple 1.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_E : E & \to & E \\ u & \mapsto & u \end{array}$$

est une application linéaire (et un endomorphisme de E) appelée **application identité**.

Exemple 2.

$$\begin{array}{rcl} 0_E : E & \to & E \\ u & \mapsto & 0 \end{array}$$

est une application linéaire (et un endomorphisme de E) appelée **application nulle**.

Exemple 3.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & \big(2x+2x'+y+y', y-y'-z-z'\big) \\ & = & (2x+y, y-z)+(2x'+y', y'-z') \\ & = & f(x,y,z)+f(x',y',z') \end{array}$$

et

$$f\big(\lambda(x,y,z)\big) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z) = \big(\lambda(2x+y), \lambda(y-z)\big) = \lambda f(x,y,z)$$

donc f est bien linéaire.

Exemple 4.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x^2-y, y+z) \end{array}$$

n'est pas linéaire. En effet, si (x,y,z) et (x',y',z') sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, alors

$$f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = \big((x+x')^2-(y+y'), y+y'+z+z'\big) = (x^2+x'^2-y-y'+2xx', y+y'+z+z')$$

et

$$f(x,y,z)+f(x',y',z') = (x+x'^2-y-y', y+y'+z+z')$$

donc f n'est pas additive. De même, on peut vérifier que f ne respecte pas la multiplication par un scalaire.

Remarque. La non-linéarité de f dans l'exemple précédent vient du terme au carré. De la même façon, une application qui renverrait un produit de ses coordonnées ne pourrait pas être linéaire. En fait, chaque composante dans l'espace d'arrivée doit être un *polynôme homogène de degré* 1 en les coordonnées.

Exemple 5. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ respectivement continues et continues de dérivées continues. Alors, l'application *dérivée*

$$\begin{array}{rccl} D: & E & \to & F \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} D(f+g) & = & (f+g)' = f'+g' = D(f)+D(g) \\ D(\lambda f) & = & (\lambda f)' = \lambda f' = D(f) \end{array}$$

Proposition 3

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires avec E, F et G deux $\mathbb{K}$-ev, alors la composition $g \circ f : E \to G$ est linéaire.

Démonstration. Pour tout $u \in E$, on a par définition de la composition $g \circ f(u) = g\big(f(u)\big)$. Soient $u, v \in E$. Alors,

$$g \circ f(u+v) = g\big(f(u+v)\big) = g\big(f(u)+f(v)\big) = g\big(f(u)\big) + g\big(f(v)\big) = g \circ f(u) + g \circ f(v).$$

De même, soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$g \circ f(\lambda u) = g\big(f(\lambda u)\big) = g\big(\lambda f(u)\big) = \lambda g\big(f(u)\big) = \lambda g \circ f(v).$$

$\square$

Remarque. Soient $f : E \to F$ une application linéaire avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, f est **entièrement déterminée par l'image des vecteurs de la base de** E. En effet, tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

donc pour trouver l'image de x par f, il suffit d'utiliser la linéarité de f sur cette égalité :

$$f(x) = f(x_1 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$$

et on voit bien qu'il suffit de connaître $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Par exemple, si on se donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,2,0) \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (0,-3,-2) \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,4,3) \end{array} \right.$$

alors on peut calculer l'expression générale de f, c'est à dire donner $f(X)$ pour **n'importe quel** $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En effet, si $X \in \mathbb{R}^3$, alors il se décompose sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) : $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$. En utilisant la linéarité de f, on a

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ & = & x(1,2,0) + y(0,-3,-2) + z(0,4,3) \\ & = & (x, 2x - 3y + 4z, -2y + 3z) \end{array}$$

d'où $f(x,y,z) = (x, 2x - 3y + 4z, -2y + 3z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

En particulier, on a la proposition suivante :

Proposition 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies avec $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Alors,

$$f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in E \quad \textbf{\textit{ssi}} \quad f(e_i) = g(e_i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, deux applications sont les mêmes partout ***ssi*** elles coïncident sur les vecteurs de base.

Démonstration.

Condition nécessaire. Si on suppose que $f(x) = g(x)$ pour n'importe quel $x \in E$, alors en particulier c'est vrai pour $x = e_i \in E$, donc les applications coïncident sur les vecteurs de base.

Condition suffisante. Supposons que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $x \in E$. Alors, x se décompose sur les e_i :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

et on appliquer f et g à cette égalité :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f(x) & = & f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) & = & x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) \\ g(x) & = & g(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) & = & x_1 g(e_1) + \ldots + x_n g(e_n) \end{array} \right.$$

Alors, par hypothèse

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) = x_1 g(e_1) + \ldots + x_n g(e_n) = g(x),$$

donc on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

□

1.2 Applications linéaires en géométrie

Définition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'**homothétie** de rapport λ est l'application

$$\begin{array}{rcl} h_\lambda : E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

Proposition 6

Les homothéties sont des applications linéaires (et même des endomorphismes).

Démonstration. Soit h_λ une homothétie de E et soient $u, v \in E$, $a, b \in \mathbb{K}$. Alors

$$h_\lambda(au + bv) = \lambda(au + bv) = \lambda au + \lambda bv = ah_\lambda(u) + bh_\lambda(v).$$

□

Remarque. Soit $u_0 \neq 0$ est un vecteur de E un $\mathbb{K}$-ev. La **translation** de vecteur u_0 définie par

$$\begin{array}{rcl} t_{u_0} : \quad E & \to & E \\ u & \mapsto & u + u_0 \end{array}$$

n'est pas une application linéaire. En effet, on a par exemple

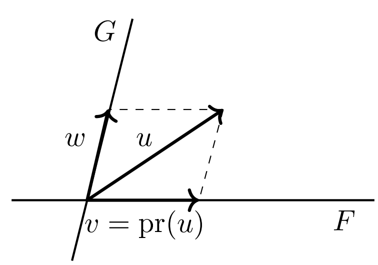
$$t_{u_0}(u + v) = (u + v) + u_0 \neq (u + u_0) + (v + u_0) = t_{u_0}(u) + t_{u_0}(v).$$

Noter également que $t_{u_0}(0) \neq 0$.

Définition 7

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Supposons que F et G soient en somme directe dans E, *ie* $E = F \oplus G$. Alors, tout vecteur $u \in E$ se décompose **de manière unique** en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$. La **projection sur F parallèlement à G** est l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pr} : \quad E & \to & F \\ u = v + w & \mapsto & v \end{array}$$



Proposition 8

Les projections sont des applications linéaires.

Démonstration. Soit pr : $E \to F$ une projection sur F parallèlement à G, avec $E = F \oplus G$.

i. Soit $u_1, u_2 \in E$. Alors, il existe $v_1, v_2 \in F$ et $w_1, w_2 \in G$ tels que $u_1 = v_1 + w_1$ et $u_2 = v_2 + w_2$. On a donc
$$\mathrm{pr}(u_1+u_2) = \mathrm{pr}\big((v_1+w_1)+(v_2+w_2)\big) = \mathrm{pr}\big((v_1+v_2)+(w_1+w_2)\big) = v_1+v_2 = \mathrm{pr}(u_1)+\mathrm{pr}(u_2).$$

ii. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$, tels que $u = v + w$ et donc
$$\mathrm{pr}(\lambda u) = \mathrm{pr}(\lambda v + \lambda w) = \lambda v = \lambda\,\mathrm{pr}(u).$$

□

Remarque. Si pr : $E \to F$ une projection sur F parallèlement à G avec $E = F \oplus G$ et qu'on suppose que $\mathrm{pr}(u) = 0$ pour un certain $u \in E$, alors $u \in G$. En effet, u s'écrit $v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$, donc
$$\mathrm{pr}(u) = 0 \iff v = 0 \iff u = w \iff w \in G.$$

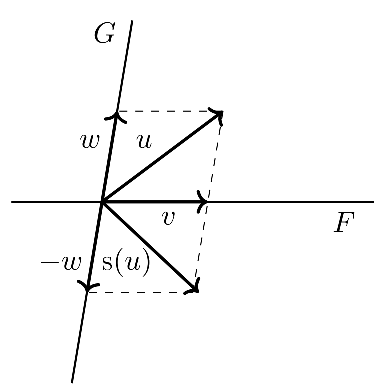
Proposition 9

Si pr : $E \to F$ une projection, alors $\mathrm{pr} \circ \mathrm{pr} = \mathrm{pr}$.

Démonstration. On doit montrer que, pour tout $u \in E$,
$$\mathrm{pr}\big(\mathrm{pr}(u)\big) = \mathrm{pr}(u).$$
Soit $u \in E$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Ainsi,
$$\mathrm{pr}\big(\mathrm{pr}(u)\big) = \mathrm{pr}(v) = v = \mathrm{pr}(u)$$
puisque $v \in F$. □

Définition 10

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Supposons que F et G soient en somme directe dans E, *ie* $E = F \oplus G$. Alors, tout vecteur $u \in E$ se décompose **de manière unique** en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$. La **symétrie par rapport à F dans la direction de G** est l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{s}: & E & \to & E \\ & u = v + w & \mapsto & v - w \end{array}$$



Proposition 11

Les symétries sont des applications linéaires (et même des endomorphismes).

Démonstration. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie par rapport à F dans la direction de G, avec $E = F \oplus G$.

i. Soit $u_1, u_2 \in E$. Alors, il existe $v_1, v_2 \in F$ et $w_1, w_2 \in G$ tels que $u_1 = v_1 + w_1$ et $u_2 = v_2 + w_2$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{s}(u_1 + u_2) & = & \mathrm{s}\big((v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)\big) \\ & = & \mathrm{s}\big((v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)\big) \\ & = & (v_1 + v_2) - (w_1 + w_2) \\ & = & (v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) \\ & = & \mathrm{s}(u_1) + \mathrm{s}(u_2). \end{array}$$

ii. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$, tels que $u = v + w$ et donc

$$\mathrm{s}(\lambda u) = \mathrm{s}(\lambda v + \lambda w) = \lambda(v - w) = \lambda\, \mathrm{s}(u).$$

$\square$

Remarque. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie par rapport à F dans la direction de G avec $E = F \oplus G$ et soit $u = v + w \in E$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

- Si $\mathrm{s}(u) = u$, alors $u \in F$ (en effet, dans ce cas $u = v$ et $w = 0$).
- Si $\mathrm{s}(u) = -u$, alors $u \in G$ (en effet, dans ce cas $u = w$ et $v = 0$).

Proposition 12

Si $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie, alors $\mathrm{s} \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_E$.

Démonstration. On doit montrer que, pour tout $u \in E$,

$$\mathrm{s}\big(\mathrm{s}(u)\big) = \mathrm{id}_E(u) = u.$$

Soit $u \in E$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Ainsi,

$$\mathrm{s}\big(\mathrm{s}(u)\big) = \mathrm{s}(v - w) = \mathrm{s}(v) - \mathrm{s}(w) = v + w = u = \mathrm{id}_E(u)$$

puisque $v \in F$. $\square$

2 Image, noyau et isomorphisme

2.1 Rappels : injection, surjection et bijection

Rappel. Soit $f : E \to F$ une application de deux ensembles E et F.

i. f est **injective** si pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$ (tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f dans E).

ii. f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f dans E).

iii. f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective (tout élément de F admet **exactement** un antécédent par f dans E).

iv. Si $f : E \to F$ est bijective, alors il existe une **application inverse** ou **réciproque** $f^{-1} : F \to E$ telle que

$$\forall x \in E,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

et cette application est bien définie et bijective.

2.2 Applications linéaires injectives

Définition 13

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f le sous-ensemble de E noté $\ker(f)$ et défini par

$$\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}.$$

Proposition 14

Le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrons que $\ker(f) \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.

i. Comme f est linéaire, $f(0) = 0$ et donc $0 \in \ker(f)$.
ii. Soient $x, y \in \ker(f)$. Alors, $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ donc $x + y \in \ker(f)$.
iii. Soient $x \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ donc $\lambda x \in \ker(f)$.

$\square$

Proposition 15

Une application linéaire $f : E \to F$ est injective ***ssi*** son noyau $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons f injective et prenons $x \in \ker(f)$. Montrons que $x = 0$. Si $x \neq 0$, alors par hypothèse d'injectivité $f(x) \neq f(0)$ mais comme x est dans le noyau de f, $f(x) = 0$ donc le seul vecteur de $\ker(f)$ est 0 et donc $\ker(f) = \{0\}$.

Condition suffisante. Supposons $\ker(f) = \{0\}$ et montrons que f est injective. Soient $u_1 \neq u_2$ deux vecteurs de E. Si $f(u_1) = f(u_2)$, alors on aurait

$$f(u_1) - f(u_2) = 0 \iff f(u_1 - u_2) = 0 \iff u_1 - u_2 \in \ker(f)$$

donc en fait $u_1 - u_2 = 0$ soit $u_1 = u_2$. **Contradiction**. Ainsi, $f(u_1) \neq f(u_2)$ et f est bien injective.

$\square$

Proposition 16

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre dans E, alors la famille $\big(f(u_1), \dots, f(u_p)\big)$ est libre dans F.

Démonstration. Soit $\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_p f(u_p) = 0$ une combinaison linéaire nulle des $f(u_i)$. Par linéarité de f, on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p) = 0$$

donc $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \in \ker(f) = \{0\}$ puisque f est injective, et donc

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0.$$

Alors, comme la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, on a bien $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ donc la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est libre dans F. $\square$

Exemple 6. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t).$$

Calculons le noyau de f. Par définition, on a

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z, t) = 0\} \\ & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) = 0\} \end{array}$$

donc il s'agit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & & = & 0 \\ 2x & +2y & +6z & +4t & = & 0 \\ -x & & -2z & -t & = & 0 \end{array} \right.$$

On remarque que le système est formé de 3 équations pour 4 inconnues, donc on peut se douter qu'il admettra une infinité de solutions. près résolution du système, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & -y & +z & & = & 0 \\ & y & +z & +t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y - z \\ y & = & -z - t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2z - t \\ y & = & -z - t \end{array} \right.$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & = & (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2z - t \text{ et } y = -z - t\} \\ & = & (-2z - t, -z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ & = & z(-2, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

On a donc trouvé une famille génératrice du noyau contenant deux vecteurs. De plus, on peut vérifier qu'ils sont libres dans $\mathbb{R}^4$, donc qu'il forme une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim \ker(f) = 2$.

2.3 Applications linéaires surjectives

Définition 17

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **image** de f le sous-ensemble de F noté $\operatorname{Im}(f)$ ou parfois $f(E)$ et défini par

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F,\ \exists u \in U \text{ tel que } v = f(u)\}.$$

De plus, on appelle **rang** de f et on note $\operatorname{rg}(f)$ la dimension de l'image de f :

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(f).$$

Proposition 18

L'image d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est un sous-espace vectoriel de F.

i. $0 \in F$ et comme f est linéaire, il existe $u \in E$ $(u = 0)$ tel que $f(u) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Im}(f)$.

ii. Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, il existe $u_1, u_2 \in E$ tels que $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$ donc

$$v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}(f).$$

iii. Soient $v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ donc $\lambda v = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in \mathrm{Im}(f)$.

□

Proposition 19

Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective ***ssi*** son image $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons f surjective et montrons que $\mathrm{Im}(f) = F$. On a déjà montré que $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F donc en particulier $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $v \in F$. Comme f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$ donc par définition $v \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $F \subset \mathrm{Im}(f)$ et on a l'égalité.

Condition suffisante. Supposons $\mathrm{Im}(f) = F$ et soit $v \in F$. En particulier, $v \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$ donc par définition f est surjective.

□

Proposition 20

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de et $f : E \to F$ une application linéaire surjective. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E, alors la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est génératrice de F.

Démonstration. Soit $v \in F$. Comme f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ et comme la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice, on a

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

Alors, par linéarité de f, on a

$$f(u) = v = \lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_p f(u_p)$$

donc tout vecteur de F se décompose sur les $f(u_i)$, donc la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est génératrice. □

Proposition 21

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application linéaire. Si $U = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est une partie de E, alors $f(U) = \mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$.
En particulier, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ et

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big).$$

On obtient aisément une famille génératrice de l'image de f, ce qui permet donc d'en extraire une base.

Démonstration. On montre l'égalité par double inclusion.

- $\subset$ Soit $v \in f(U)$. Alors, il existe un $u \in U$ tel que $f(u) = v$. Comme $u \in U = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on peut décomposer u : $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ donc en fait $f(u) = x_1f(u_1) + \ldots + x_nf(u_n)$ donc $v \in \mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ d'où $f(U) \subset \mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$.
- $\supset$ Soit $v \in \mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$, alors v est combinaison linéaire des $f(u_1), \ldots, f(u_n)$. L'image d'un sev par une application linéaire est un sev, donc l'ensemble $f(U)$ est un sev de F et en particulier $v \in f(U)$ d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

□

Exemple 7. Reprenons l'application f de l'exemple 7 : pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t).$$

Calculons l'image de f. Par définition, on a

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^4) = \{f(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

De plus, d'après le lemme et la remarque précédente, on sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

donc on a seulement besoin de calculer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\left\{\begin{array}{lllll} f(e_1) & = & f(1,0,0,0) & = & (1,2,-1) \\ f(e_2) & = & f(0,1,0,0) & = & (-1,2,0) \\ f(e_3) & = & f(0,0,1,0) & = & (1,6,-2) \\ f(e_4) & = & f(0,0,0,1) & = & (0,4,-1) \end{array}\right.$$

d'où

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

donc on obtient une famille génératrice de l'image de f constituée de 4 vecteurs. On peut donc en extraire une base : en faisant les calculs, on voit que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est liée, donc on peut en extraire une famille libre en enlevant au moins un vecteur. A nouveau en faisant les calculs, on obtient que quelque soit le vecteur qu'on enlève, la famille de trois vecteurs restants est encore liée. En enlevant cette fois-ci deux vecteurs, par exemple $f(e_3)$ et $f(e_4)$, on obtient une famille libre à deux éléments dans $\mathbb{R}^4$, elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. En particulier, $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2$.

Remarque. Une autre façon de voir que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est liée est de calculer directement le rang de cette famille en écrivant la matrice constituée de ces 4 vecteurs, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et de l'**échelonner** (pivot de Gauss), de telle sorte à obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang 2. Ainsi, on sait directement que $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2$ donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ sera constituée de seulement 2 vecteurs (qu'on extrait de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$).

2.4 Isomorphismes d'espaces vectoriels

Définition 22

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application. On dit que :

i. f est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective. Dans ce cas, on dit que E et F sont **isomorphes** et on note $E \cong F$.

ii. f est un **automorphisme** si f est un isomorphisme et un endomorphisme (*ie* si $E = F$).

Proposition 23

Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme.

Démonstration. On sait que si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi. Il suffit donc de montrer qu'elle est aussi linéaire.

i. Soient $y_1, y_2 \in F$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ les images de y_1, y_2 par f^{-1}. Alors, on a $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ et puisque f est linéaire,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2.$$

Composons par f^{-1} :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\big(f(x_1 + x_2)\big) & = & f^{-1}(y_1 + y_2)\big) \\ x_1 + x_2 & = & f^{-1}(y_1 + y_2) \\ f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) & = & f^{-1}(y_1 + y_2) \end{array}$$

et la dernière égalité nous donne l'additivité f^{-1}.

ii. Soient $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. A nouveau, notons $x = f^{-1}(y)$ l'image de y par f^{-1}. Alors, la linéarité de f donne $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$ et en composant par f^{-1}, on obtient

$$\lambda x = \lambda f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda y)$$

et on obtient la linéarité de f.

□

Théorème 24

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, f est un isomorphisme ***ssi*** $\big(f(e_1, \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F.

Démonstration.

Condition nécessaire. La proposition 16 nous dit qu'une application linéaire injective transporte une famille libre sur une famille libre, et la proposition 20 nous dit qu'une application linéaire surjective transporte une famille génératrice sur une famille génératrice. Ainsi, si f est un isomorphisme, elle est bijective et donc transporte bien une base de E sur une base de F.

Condition suffisante. Supposons que $\mathcal{F} = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ soit une base F et montrons que f est un isomorphisme. Par définition, f est linéaire donc il suffit de montrer qu'elle est bijective.

i. Montrons que f est injective. Soit $u \in \ker(f)$. Alors, $f(u) = 0 = f(0)$. Mais u est aussi un élément de E donc u se décompose sur la base de E : $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ donc

$$0 = f(u) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$$

est une décomposition linéaire nulle des éléments de la base $\mathcal{F}$, donc en fait $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et $u = 0$, soit $\ker(f) = \{0\}$.

ii. Montrons que f est surjective. Soit $v \in F$, et on cherche un vecteur $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Comme $\mathcal{F}$ est une base de F, v se décompose

$$v = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)$$

donc il suffit de prendre $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$.

□

Proposition 25

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, E et F sont isomorphes ***ssi*** ils sont de même dimension :

$$E \cong F \quad \textbf{\textit{ssi}} \quad \dim E = \dim F.$$

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons E et F isomorphes. Par définition, il existe un isomorphisme $f : E \to F$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $n = \dim E$. Alors, d'après le théorème 24, la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F qui compte n vecteurs, donc $\dim F = n = \dim E$.

Condition suffisante. Supposons que $\dim E = \dim F = n$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Construisons un isomorphisme f entre E et F. Commençons par noter f l'application définie par

$$f(e_1) = f_1, \dots, f(e_n) = f_n.$$

Alors, f est bien définie et f est linéaire : en effet, toute application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. De plus, on sait que $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F donc d'après le théorème 24, f est bijective donc c'est bien un isomorphisme et E et F sont isomorphes.

$\square$

Proposition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie qui se décompose en somme directe de deux sev F et G : $E = F \oplus G$.

i. Les symétries par rapport à F dans la direction de G sont des isomorphismes.

ii. En dehors de l'identité (projection de E sur E parallèlement à $\{0\}$), les projections sur F parallèlement à G ne sont pas des isomorphismes.

Démonstration. i. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ une symétrie. Pour tout $u = v + w \in E = F + G$, on a $\mathrm{s}(u) = v - w$. Une base de $E = F \oplus G$ est donnée par $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ où $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G. Alors,

$$\big(\mathrm{s}(f_1), \ldots, \mathrm{s}(f_p), \mathrm{s}(g_1), \ldots, \mathrm{s}(g_q)\big) = (f_1, \ldots, f_p, -g_1, \ldots, -g_q)$$

est encore une base de E donc d'après le théorème 24, s est un isomorphisme.

ii. Soit $\mathrm{pr} : E \to F$ une projection. Pour tout $u = v + w \in E = F + G$, on a $\mathrm{pr}(u) = v$. Alors, pour tout vecteur $w \in G$, on a $\mathrm{pr}(w) = 0$ donc $w \in \ker(\mathrm{pr})$ et en particulier, $G \subset \ker(\mathrm{pr})$ soit $\ker(\mathrm{pr}) \neq \{0\}$ donc pr n'est pas injective et ne peut donc pas être un isomorphisme.

$\square$

3 Applications linéaires et espaces vectoriels

3.1 Théorème du rang

Proposition 27

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

i. $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$

ii. $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim E$

Démonstration.

i. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, donc en particulier $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$.

ii. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On utilise le lemme 21 et la remarque **??**, qui nous disent que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$$

, donc $\mathrm{Im}(f)$ possède une famille génératrice de n vecteurs. On peut donc en extraire une base qui contraindra au plus n vecteurs, donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq n = \dim E$.

$\square$

Théorème 28 (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. L'espace $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. Il admet donc un supplémentaire, notons le S. On a donc

$$\ker(f) \oplus S = E.$$

En particulier, $\dim \ker(f) + \dim S = \dim E$. De plus, notons $g : S \to F$ l'application (appelée **restreinte** de f à S)à définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & S & \to & \operatorname{Im}(f) \subset F \\ & u \mapsto & f(u) & \end{array}$$

Montrons que g est un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im}(f)$, car on aura alors $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim S$.

i. Montrons que g est injective, *ie* $\ker(g) = \{0\}$. Soit $u \in S$ tel que $g(u) = 0$ ($u \in \ker(g)$). Sur l'espace S, $f = g$ donc en fait $g(u) = f(u) = 0$ donc $u \in \ker(f)$. Ainsi, $u \in \ker(f) \cap S = \{0\}$ puisque $\ker(f) \oplus S = E$, donc $u = 0$ et $\ker(g) = 0$ donc g est injective.

ii. Montrons que g est surjective, *ie* $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f)$. Par double inclusion : soit $v \in \operatorname{Im}(g)$, alors il existe $u \in S \subset E$ tel que $f(u) = v$ donc en particulier $v \in \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(f)$. De même, soit $v \in \operatorname{Im}(f)$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Comme $u \in E = \ker \oplus S$, on a $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \ker(f)$ et $u_2 \in S$ donc

$$v = f(u) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + f(u_2) = g(u_2) \text{ car } u_2 \in S.$$

Ainsi, $v = g(u_2)$ donc $v \in \operatorname{Im}(g)$ et $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(f)$, d'où l'égalité et la surjectivité de g.

Ainsi, g est bien un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im}(f)$ donc en particulier $\dim S = \dim \operatorname{Im}(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus S$, on a finalement

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim S = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

$\square$

Remarque. Attention ! Ce n'est pas parce qu'on a l'égalité de dimension

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$$

que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$! En effet, $\ker(f)$ est un sev de E mais $\operatorname{Im}(f)$ est un sev de F donc ils ne peuvent pas être en somme directe. En revanche, on sait qu'il existe un sev S de E tel que $S \cong im(f)$ et $E = \ker(f) \oplus S$, comme dans la preuve.

Exemple 8. Si on reprend l'application linéaire des exemples 6 et 7 :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \text{ pour tout } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

alors grâce au théorème du rang on peut se limiter au calcul du noyau pour connaître la dimension de l'image (et vice-versa). En effet, on a calculé que $\dim \ker(f) = 2$, donc d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 2 + \dim \operatorname{Im}(f)$$

donc on retrouve bien $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, et on sait directement qu'une base de $\operatorname{Im}(f)$ sera constituée de seulement 2 vecteurs parmi ceux de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ (sans avoir besoin d'échelonner une matrice ou de résoudre un système de plus).

Théorème 29

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

i. Si $\dim E \neq \dim F$, alors f n'est pas bijective.

ii. Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective ***ssi*** f est surjective ***ssi*** f est injective.

Démonstration.

i. Supposons que $\dim E \neq \dim F$. Montrons par l'absurde que f ne peut pas être bijective. En effet, si c'était le cas, alors on aurait en particulier $\ker(f) = \{0\}$ (f injective) donc $\dim \ker(f) = 0$, mais aussi $\mathrm{Im}(f) = F$ (f surjective) donc $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$. D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 0 + \dim F = \dim F.$$

Contradiction. Ainsi, f n'est pas bijective.

ii. Supposons que $\dim E = \dim F$. Montrons d'abord que f est surjective ***ssi*** f est injective.

Condition nécessaire. Supposons f surjective et montrons que $\ker(f) = \{0\}$. Comme f est surjective, on a $\mathrm{Im}(f) = F$ donc $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$ et donc d'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim F$$

mais comme $\dim F = \dim E$ par hypothèse, on doit avoir $\dim \ker(f) = 0$ ce qui revient à dire que $\ker(f) = \{0\}$. Ainsi, f est injective.

Condition suffisante. Supposons f injective et montrons que $\mathrm{Im}(f) = F$. Par hypothèse, on a $\dim \ker(f) = 0$ donc d'après le théorème du rang, on a

$$\dim F = \dim E = \dim \mathrm{Im}(f)$$

donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F de même dimension, donc en fait $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.

On a donc montré que si $\dim E = \dim F$, alors si f est injective, f est surjective et donc bijective et de même, si f est surjective alors elle est injective et donc bijective. Ainsi, si $\dim E = \dim F$, on a aussi f bijective et d'après le premier point du théorème, on a l'implication réciproque (f bijective implique $\dim E = \dim F$), ce qui achève de démontrer le théorème.

□

3.2 Cas particulier : les formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On rappelle qu'une **forme linéaire** sur E est une application linéaire à valeur dans le corps de base $\mathbb{K}$, *ie* $f : E \to \mathbb{K}$.

Proposition 30

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle.

$$\dim \mathrm{Im}(f) = 1 \text{ et } \dim \ker(f) = n - 1.$$

Démonstration. L'image de f est un sev de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$, et $\dim \mathbb{K} = 1$. Ainsi, les seuls sev possibles de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ ou $\mathbb{K}$. Comme f est non nulle, l'image de f contient au moins un élément donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{K} = 1$. Ainsi, par le théorème du rang, on a

$$\dim \ker(f) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f) = n - 1.$$

□

Corollaire 31

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires dans $\mathbb{K}$. On pose S l'ensemble des solutions de l'équation $a_1 x1 + \ldots + a_n x_n = 0$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K} \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\}.$$

Alors, $\dim S = n - 1$.

Démonstration. Il faut voir S comme le noyau d'une forme linéaire non nulle. En effet, considérons l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & \mathbb{K} \\ & u & \mapsto & a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \end{array}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de u dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors, φ est une forme linéaire non nulle et par définition,

$$\begin{array}{rcl} \ker(\varphi) & = & \{u \in E, \varphi(u) = 0\} \\ & = & \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}, a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\} \\ & = & S \end{array}$$

donc la propriété précédente nous dit que $\dim \ker(\varphi) = \dim S = n - 1$. $\square$

Université de Strasbourg
Math-Eco - 2021/2022
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2022
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 4 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, on considère des espaces vectoriels de **dimension finie** sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Matrice d'une application linéaire

1.1 Une application linéaire est une matrice

Rappel. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les images par f des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ se décomposent sur les éléments de la base $\mathcal{B}'$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \ldots + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{p2}e'_p \\ & & \vdots \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \ldots + a_{pn}e'_p \end{array}\right.$$

Définition 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. On appelle **matrice** de f dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ la matrice notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ dans la base $(e'_1, \ldots, e'_p)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \ldots + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{p2}e'_p \\ & & \vdots \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \ldots + a_{pn}e'_p \end{array}\right. \iff M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarques.

i. La matrice d'une application linéaire dépend clairement du choix des base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
ii. Une application linéaire est donc **entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base**.
iii. Si f est un endomorphisme de E, alors on prend $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ une base de E on note $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemple 1. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e'_1, e'_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, z - y) \end{array}$$

On a alors

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,0) & = & e'_1 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (-1,-1) & = & -e'_1 - e'_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,1) & = & e'_2 \end{array}\right.$$

et on obtient ainsi la matrice de f :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et p. On munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Alors, l'application qui a une application linéaire associe sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

$$\begin{array}{rccc} M : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathcal{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**. Autrement dit, **il est équivalent de se donner une application linéaire et une matrice** : à toute application linéaire est associée une matrice et à toute matrice est associée une application linéaire.

1.2 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

1.2.1 Somme et multiplication par un scalaire

Proposition 3

Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires avec $M(f)$ et $M(g)$ leurs matrices respectives dans des bases fixées. Alors, dans ces mêmes bases,

- $f + g$ a pour matrice $M(f) + M(g)$
- λf a pour matrice $\lambda M(f)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. C'est immédiat, puisque sur les vecteurs de bases on a

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(e_j) & = & f(e_j) + g(e_j) \\ (\lambda f)(e_j) & = & \lambda\big(f(e_j)\big) \end{array}$$

et ces deux lignes se traduisent de la même manière sur les matrices. □

1.2.2 Calcul de l'image d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, alors on sait que x se décompose sur la base $\mathcal{B}$ de façon unique :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les **coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$. Alors, on peut noter $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ la **matrice coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, X est le vecteur colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$.

Proposition 4

Soient $f : E \to F$ une application linéaire avec $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Notons M la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si $x \in E$ est un vecteur de E et X est la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, alors la matrice Y des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B}'}(f(x)) = Y = MX = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors, en particulier on a

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \\ f(x) & = & y_1 f_1 + \ldots + y_p f_p \end{array}$$

et par linéarité

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n).$$

Notons $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (m_{ij})_{j,j} \in \mathcal{M}_{p,n}$. Par définition, la $j^{\text{ième}}$ colonne de M est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En particulier, $f(e_j)$ a pour coordonnées $(m_{1,j}, \ldots, m_{p,j})$ dans $\mathcal{B}'$, donc $f(x)$ a pour coordonnées

$$x_1 \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} m_{12} \\ \vdots \\ m_{p2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} m_{1n} \\ \vdots \\ m_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 m_{11}+ & \ldots & +x_n m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 mp1+ & \ldots & +x_n m_{pn} \end{pmatrix} = MX$$

Par ailleurs, $f(x)$ a aussi pour coordonnées le vecteur Y, donc en fait

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 m_{11}+ & \ldots & +x_n m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 mp1+ & \ldots & +x_n m_{pn} \end{pmatrix} = MX$$

donc on a bien $Y = MX$ et $M_{\mathcal{B}'}(f(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x)$. □

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y).$$

On a $f(1, 0) = (0, 2, 1)$ et $f(0, 1) = (0, 1, 3)$, donc dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors, $f(u) = f(1, 2) = (0, 4, 4)$. Notons Y la matrice coordonnées de $f(u)$. Alors, on retrouve ce résultat en calculant le produit matriciel

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = Y.$$

1.2.3 Composition et produit matriciel

Proposition 5

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies avec $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors, $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G et sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Démonstration. Il s'agit en fait de montrer que, pour n'importe quel $x \in E$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)\ M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x).$$

Soit donc $x \in E$ un vecteur quelconque dont on note $M_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors, en appliquant la proposition 4 successivement au vecteur $f(x) \in F$ puis au vecteur $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) M_{\mathcal{B}}(x) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\big(g \circ f(x)\big) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ &= M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\big(f(x)\big) \\ &= M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)\ M_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité attendue. □

Exemple 3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires dont les matrices dans les bases canoniques $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont données respectivement par

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut décrire entièrement l'application $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}$ (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) en calculant le produit matriciel BA :

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

En particulier $\big(g \circ f\big)(e_1) = e_1 + 4e_2 = (1, 4)$ et $\big(g \circ f\big)(e_2) = -e_1 + 5e_2 = (-1, 5)$, donc on récupère l'expression générale de l'application $g \circ f$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$g \circ f(x, y) = x\big(g \circ f\big)(e_1) + y\big(g \circ f\big)(e_2) = (x - y, 4x + 5y).$$

1.2.4 Matrice d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On rappelle qu'un **endomorphisme de** E est une application linéaire $f : E \to E$ (l'espace de départ est le même que l'espace d'arrivé). En particulier, la matrice de f (dans n'importe quelle base de E) est une matrice **carrée**, donc on peut calculer le produit de cette matrice avec elle-même, ce qui revient d'après la proposition 5 à composer l'application f avec elle-même.

Proposition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. On note $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On note f^k l'application f composée k fois avec elle-même : $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Alors, on a

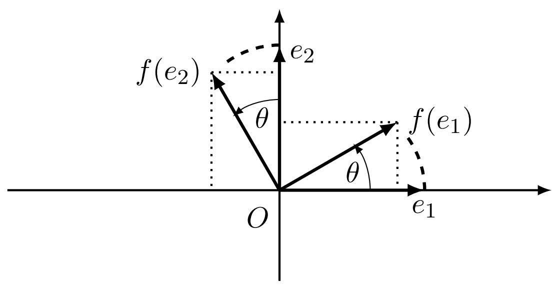
$$M_{\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}}(f \circ f) = M_{\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(f)$$

et par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = M_{\mathcal{B}}(\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}) = \big(M_{\mathcal{B}}(f)\big)^k.$$

Démonstration. La première ligne découle directement de la proposition 5 et la deuxième s'obtient par une simple récurrence sur k. □

Exemple 4. On se place dans $\mathbb{R}^2$ que l'on munit de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on considère la **rotation de centre** O **et d'angle** θ que l'on note f et qu'on représente par le schéma suivant :



En regardant le dessin, on trouve facilement les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base canonique (e_1, e_2) et on obtient la matrice de f dans cette base :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(e_1) & = & \cos(\theta)e_1 & + & \sin(\theta)e_2 \\ f(e_2) & = & -\sin(\theta)e_1 & + & \cos(\theta)e_2 \end{array}\right. \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors, la composition $f \circ f$ est donnée par

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(f \circ f) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc en fait f^2 est la rotation de centre O et d'angle 2θ. Par récurrence, on trouve que l'application f^k est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

soit f^k est la rotation de centre O et d'angle $k\theta$.

1.2.5 Matrice d'isomorphismes et d'automorphismes

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même dimension** n avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors, f est un isomorphisme (*ie* f est bijective) ***ssi*** la matrice $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible. De plus,

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big)^{-1}.$$

Démonstration. Si f est bijective, alors l'application réciproque f^{-1} existe et par définition, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. En particulier, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

et d'après la proposition 5,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n.$$

De même, en prenant $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$, on obtient

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = I_n$$

donc on a bien l'inverse à droite et à gauche, ainsi que la formule $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$. $\square$

Exemple 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'application linéaire f définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y + 3z, y + 2z, z).$$

En calculant le noyau de f, on trouve aisément que $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$, donc f est injective et, comme f est un endomorphisme en dimension finie, f est bijective. On peut donc chercher l'inverse f^{-1}. Pour cela, donnons la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1,0,0) & = & (1,0,0) \\ f(0,1,0) & = & (1,1,0) \\ f(0,0,1) & = & (3,2,1) \end{array}\right. \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, en calculant d'après la proposition précédente

$$M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'inverse de f est donnée sur chaque vecteur de la base canonique par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f^{-1}(e_1) & = & (1,0,0) \\ f^{-1}(e_2) & = & (-1,1,0) \\ f^{-1}(e_3) & = & (-1,-2,1) \end{array}\right.$$

donc on peut retrouver l'expression de f^{-1} pour n'importe quel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^{-1}(x, y, z) = xf^{-1}(e_1) + yf^{-1}(e_2) + zf^{-1}(e_3) = (x - y - z, y - 2z, z).$$

Remarque. Attention : cette proposition 7 nous dit en particulier qu'on ne peut avoir un isomorphisme que si E et F sont de même dimensions, ce qui revient à dire que la matrice de f est **carrée** (en effet, on ne peut pas inverser une matrice qui ne serait pas carrée). En particulier, si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ et $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors on a obligatoirement $n = m$ et donc en fait, f est un **automorphisme** de $\mathbb{R}^n$ (f est un endomorphisme inversible).

On résume toutes les propriétés des **automorphismes** dans le théorème suivant :

Théorème 8 (Automorphisme)

Soit f un endomorphisme de E, avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans cette base. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. f est un isomorphisme.
ii. f est injective.
iii. $\ker(f) = \{0\}$.
iv. f est surjective.
v. $\mathrm{Im}(f) = E$.
vi. A est inversible ($AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$).
vii. A est inversible à gauche ($A^{-1}A = I_n$).
viii. A est inversible à droite ($AA^{-1} = I_n$).
ix. $\det A \neq 0$.

2 Changement de base

2.1 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Prenons **deux bases de ce même espace** : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Alors, les vecteurs e'_i s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs e_i (et vice versa) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e'_1 & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n \\ e'_2 & = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n \\ & & \vdots \\ e'_n & = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n \end{array}\right.$$

Définition 9

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ la matrice notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_i de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} e'_1 & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n \\ e'_2 & = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n \\ & & \vdots \\ e'_n & = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n \end{array}\right. \iff P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 6. Prenons $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Posons e'_1, e'_2 et e'_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$\begin{cases} e'_1 &=& (1, 0, -1) \\ e'_2 &=& (0, 1, 1) \\ e'_3 &=& (1, 0, 1) \end{cases}$$

Alors, on peut vérifier que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui possède trois vecteurs). Notons-la $\mathcal{B}'$. On peut exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} e'_1 &=& 1e_1 + 0e_2 - 1e_3 \\ e'_2 &=& 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ e'_3 &=& 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \end{cases}$$

et donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donnée par les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ (en colonne), soit :

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La matrice de passage entre deux bases correspond en fait à la matrice de l'application identité exprimée dans ces deux bases (**attention à l'inversion de l'ordre des bases**) :

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$$

En particulier, si $\mathcal{B}''$ est une troisième base de E, alors comme $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, en appliquant la proposition 5, on obtient

$$M_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = M_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\ M_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$$

soit

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}.$$

De même, id_E est un automorphisme de E avec $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, donc en appliquant la proposition 7, on a

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}^{-1} = \left(M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\right)^{-1} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}.$$

En résumé, on a les deux propriétés suivantes :

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev que l'on munit de trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Alors, on a les propriétés suivantes :

i. La matrice de passage est la matrice de l'application identité : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$.

ii. Propriété de transitivité : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$.

iii. Les matrices de passage sont inversibles et on a : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.

2.2 Changement de base et vecteurs

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie que l'on munit de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Notons $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $x \in E$ un élément de E de matrices coordonnées $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors, on a

$$X' = P^{-1}X \quad \text{et} \quad X = PX'.$$

Démonstration. Puisque la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de l'application linéaire id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (cf proposition 2.1), il suffit d'appliquer la proposition 4 :

$$PX' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\ M_{\mathcal{B}'}(x) = M_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = M_{\mathcal{B}}(x) = X$$

d'où $PX' = X$ et, l'autre égalité s'obtient en multipliant celle-ci par P^{-1} :

$$P^{-1}X = P^{-1}PX' = X'.$$

$\square$

Exemple 7. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et d'une deuxième base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ définie par

$$\begin{cases} e_1' &= (2,1) \\ e_2' &= (3,2) \end{cases}$$

Notons $x \in E$ le vecteur de matrice coordonnées $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit $x = 2e_1 + 3e_2$. On cherche à déterminer ses coordonnées X' dans la base $\mathcal{B}'$. En utilisant la proposition précédente, on a

$$X' = P^{-1}X$$

où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Puisque

$$\begin{cases} e_1' &= 2e_1 + e_2 \\ e_2' &= 3e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

la matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc finalement

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par le vecteur $X' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit $x = -5e_1' + 4e_2'$. On peut vérifier ce résultat par un calcul direct : si on exprime les vecteurs e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient

$$\begin{cases} e_1 &= 2e_1' - e_2' \\ e_2 &= -3e_1' + 2e_2' \end{cases}$$

donc

$$x = 2e_1 + 3e_2 = 2(2e_1' - e_2') + 3(-3e_1' + 2e_2') = -5e_1' + 4e_2'$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Remarque. Dans l'exemple précédent, on a choisi d'inverser la matrice P par un calcul direct, mais on peut aussi trouver P^{-1} en exprimant les vecteurs (e_1, e_2) dans la base (e_1', e_2') et en utilisant la proposition 2.1. En effet, on a

$$\begin{cases} e_1' &= 2e_1 + e_2 \\ e_2' &= 3e_1 + 2e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 &= 2e_1' - e_2' \\ e_2 &= -3e_1' + 2e_2' \end{cases}$$

donc d'après la proposition 2.1, on retrouve bien

$$P^{-1} = P_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Changement de base et applications linéaires

Théorème 12 (Changement de base, cas général)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. On munit E de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et de même on munit F de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Notons

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f), \quad A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}, \quad Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}.$$

Alors, on a les deux relations suivantes :

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QA'P^{-1}.$$

Dans ce cas, on dit que les matrices A et A' sont **équivalentes**.

Démonstration. Notons d'abord qu'il suffit en fait de montrer l'une des deux égalités, car l'autre est obtenue en multipliant à gauche et à droite par l'inverse des matrices de passage :

$$A' = Q^{-1}AP \iff QA'P^{-1} = QQ^{-1}APP^{-1} = A.$$

On va donc montrer que $A = QA'P^{-1}$. Pour cela, on doit en fait vérifier que pour n'importe quel $x \in E$ de matrice coordonnées $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, on a l'égalité

$$AX = QA'P^{-1}X.$$

Soit donc $x \in E$ un vecteur quelconque. Notons respectivement $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ ses matrices coordonnées dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E. Alors, d'après les propositions 11 et 4 qu'on applique au vecteur $f(x) \in F$ de matrices coordonnées $M_{\mathcal{C}}\big(f(x)\big)$ dans la base $\mathcal{C}$ de F et $M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big)$ dans la base $\mathcal{C}'$ de F, on a

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = Q^{-1}M_{\mathcal{C}}\big(f(x)\big) = Q^{-1}M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x) = Q^{-1}AX.$$

De même, la proposition 4 nous donne que $X' = P^{-1}X$, donc on a aussi

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)\ M_{\mathcal{B}'}(x) = A'X' = A'P^{-1}X.$$

Ainsi, on a

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = Q^{-1}AX = A'P^{-1}X$$

soit

$$Q^{-1}AX = A'P^{-1}X \iff AX = QA'P^{-1}X$$

donc on a bien l'égalité attendue pour n'importe quel $x \in E$. Ainsi, les deux égalités du théorèmes sont vérifiées. ☐

Corollaire 13 (Changement de base, endomorphisme linéaire)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Notons

$$A = M_{\mathcal{B}}(f), \quad A' = M_{\mathcal{B}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Alors, on a les deux relation suivantes :

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}.$$

Dans ce cas, on dit que les matrices A et A' sont **semblables**.

Exemple 8. Reprenons l'exemple 6, c'est à dire $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par

$$e'_1 = (1, 0, -1), \quad e'_2 = (0, 1, 1), \quad e'_3 = (1, 0, 1).$$

On avait calculé la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A suivante dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ qui représente l'application f dans la base $\mathcal{B}'$. On applique pour cela le théorème 12 au cas des endomorphismes et on a la relation suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

On a donc besoin de trouver la matrice P^{-1}. Pour cela, on peut soit calculer l'inverse de P en utilisant l'algorithme de Gauss, soit utiliser la proposition 2.1 et remarquer que la matrice P^{-1} est en fait donnée par

$$P^{-1}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Il s'agit donc d'écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$: pour cela, on doit exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). Utilisons que

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 - e_3 \\ e'_2 &= e_2 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_3 \end{cases}$$

donc en résolvant ce système en e_1, e_2 et e_3, on trouve que

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3) \\ e_2 &= \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3) \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_3) \end{cases}$$

donc finalement, en notant les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$ en colonne, on obtient

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut donc trouver la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$f(e'_1) = 2e'_1, \quad f(e'_2) = 2e'_2, \quad f(e'_3) = 4e'_3,$$

ce qu'on peut aussi vérifier par un calcul direct.