Outils Mathématiques pour l'ingénieur

Exercices

INSA Strasbourg

Victoria Callet
victoria.callet@insa-strasbourg.fr

Année universitaire 2024-2025

Table des matières

Chapitre 1. Généralités

1.1. Fractions et puissances

★ **Exercice 1.** Mettre sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

a) $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}}$ c) $\dfrac{1}{1-\dfrac{5}{2+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{3}}}}$

★ **Exercice 2.** Donner une condition sur les réels a, b et c pour que l'expression suivante soit bien définie, puis simplifier-la :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

★ **Exercice 3.** Trouver trois réels a, b et c tels que l'égalité suivante soit vérifiée pour tout entier $k>1$:

$$\frac{2k-3}{k(k^2-1)}=\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k+1}$$

★ **Exercice 4.** Sans utiliser la calculatrice, exprimer les résultats des opérations suivantes en notation scientifique :

a) $1\ 800\times 40\ 000$

b) $1\ 200\times 300\ 000$

c) $3\ 000\times 0,000\ 05$

d) $7\times 10^{-6}\times 0,004$

e) $5\times 10^{-5}\times 0,0002$

f) $\dfrac{0,006}{0,03}$

g) $\dfrac{0,0028}{0,007}$

h) $\dfrac{1,2\cdot 10^{-3}}{0,003}$

i) $\dfrac{0,0012}{3\cdot 10^{-2}}$

j) $\dfrac{2,4\cdot 10^{-5}}{0,6\cdot 10^{-3}}$

k) $\dfrac{2,4\cdot 10^{-2}\times 2\cdot 10^{2}}{0,8\cdot 10^{-5}}$

1.2. Racine carrée

★ **Exercice 5.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $7\sqrt{20} - 11\sqrt{45} + 3\sqrt{80}$

b) $\sqrt{24}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{8})$

c) $(5 - 2\sqrt{7})^2$

d) $(3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$

e) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

f) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$

g) $\dfrac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\dfrac{1}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$

i) $\left(\dfrac{2 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}\right)^2$

j) $\left(\dfrac{3 - 2\sqrt{6}}{5 - 3\sqrt{2}}\right)^2$

★ **Exercice 6.** Sans utiliser la calculatrice, exprimer les résultats des opérations suivantes en notation scientifique :

a) $\sqrt{4 \cdot 10^2}$

b) $\sqrt{9 \cdot 10^{-4}}$

c) $\sqrt{64 \cdot 10^{-26}}$

d) $\sqrt{(-9 \cdot 10^{-5})^4}$

e) $\sqrt{\dfrac{5 \cdot 10^{-5} + 30 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}}}$

f) $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 10^{-5} - 0,006 \cdot 10^{-2}}{-16 \cdot 10^{-3}}}$

g) $\sqrt{\dfrac{4 \cdot 10^{-3} + 0,9 \cdot 10^{-2} + 0,03 \cdot 10^{-1}}{7 \cdot 10^{-5} - 0,03 \cdot 10^{-3}}}$

★ **Exercice 7.** Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes :

a) $x^2 = -16$

b) $x^2 - 6 = 10$

c) $x^2 - 4 = -2^2$

d) $x^2 - 4 = -3^2$

e) $2x^2 + x - 16 = x$

f) $2x^2 + 4x - 200 = 4x$

1.3. Équations et inéquations

★ **Exercice 8.** Résoudre les équations suivantes :

a) $(x - 4)(x + 7) - (2x + 3)(x + 7) = 0$

b) $(x + 1) = (x + 1)^2$

c) $(2x - 5) = 3(5 - 2x)(x + 1)$

d) $(x + 4)^2 = (5 - 3x)(8 + 2x)$

e) $(x - 2)^2 = (3x + 1)(4x - 2)$

f) $x^2 + 2x + 1 = (2x - 3)(x + 1)$

★ **Exercice 9.** Déterminer l'ensemble de définition de l'équation suivante et la résoudre :

$$\frac{2}{3x-1} - \frac{3x}{3x+1} = \frac{4}{9x^2-1} - 1$$

★ **Exercice 10.** Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $(2x+3)^2 - 4$

b) $2x^2 - 3$

c) $(x^2-4)(2x-1)$

d) $(x-3)(x^2-4x+4)$

e) $(x-1)(x^2+4x+4)$

f) $\dfrac{(2-x)(4x+1)}{(x-3)^2(3x-2)}$

★ **Exercice 11.** Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x^2-4}{x+1} \leq 0$

b) $\dfrac{x^2-2}{x-1} \leq 2$

c) $\dfrac{1}{5x+2} \geq 5x+2$

d) $14x^2 + 3 < 23x$

e) $(2x-5)^2 > 5 - 2x$

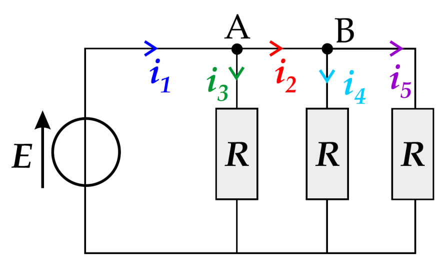
f) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{3}{4} \leq 0$

g) $\dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$

1.4. Applications

★ **Exercice 12.**

Dans un circuit électrique quelconque, où circule un courant continu (d'intensité constante), une des lois qui est toujours vérifiée est la loi des nœuds : la somme des courants entrants dans un nœud est égale à la somme des courants sortants de celui-ci.



Sur l'exemple ci-contre, où on a noté i_1, i_2, i_3, i_4 et i_5 les intensités des courants dans les différentes branches, on a donc :

- au noeud A : $i_1 = i_2 + i_3$ (équation $E1$)
- au noeud B : $i_2 = i_4 + i_5$ (équation $E2$)

Par ailleurs, des arguments de symétrie permettent de prévoir que $i_3 = i_4 = i_5$. Grâce à un ampèremètre, on mesure $i_1 = 1$.

1. Écrire les équations $(E1)$ et $(E2)$ en ne faisant plus intervenir que les inconnues i_2 et i_3 ainsi que le paramètre connu i_1.

2. En utilisant $(E2)$, remplacer i_2 dans $(E1)$ par son expression en fonction de i_3. Obtenir ainsi l'équation donnant i_3 en fonction de i_1. Calculer sa valeur numérique.

3. En déduire l'expression de i_2 en fonction de i_1, puis la valeur numérique de i_2.

4. En déduire finalement les valeurs de i_4 et i_5.

★ **Exercice 13.** On considère une lentille optique placée au point O, de distance focale notée f caractérisant la lentille. On suppose que la lentille est convergente, ce qui signifie que $f > 0$. Lorsque l'on place un objet avant une lentille, par exemple au point A, on peut obtenir une image au point A' situé après la lentille. On peut alors mesurer les distances suivantes : $x = OA$, la distance entre l'objet et la lentille et $x' = OA'$, la distance entre la lentille et l'image. Ces distances sont reliées par la relation de Descartes :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

Toutes les grandeurs doivent être données dans la même unité afin que cette relation fonctionne. On précise que l'on prendra toujours $x > f$.

1. Donner la relation qui exprime x' en fonction de x et f.

2. On prend une lentille de distance focale $f = 200$ mm et on mesure la distance objet - lentille : on trouve $x = 30$ cm. Déduire la valeur numérique de la distance lentille – image x'.

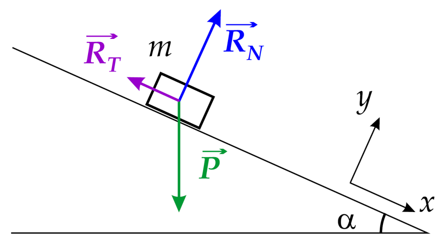
3. Montrer que la relation obtenue à la première question peut aussi s'écrire : $x' = \dfrac{f}{1 - \frac{f}{x}}$.

4. En déduire comment variera la distance x' entre la lentille et l'image si la distance x entre l'objet et la lentille augmente (on éloigne progressivement l'objet de la lentille).

5. On cherche la position de l'objet telle que la distance objet – lentille x soit la même que la distance lentille – écran x'. On doit donc avoir : $x = x' = \dfrac{xf}{x - f}$. Résoudre cette équation, pour obtenir l'expression de x en fonction de f (on précise que la solution $x = 0$ n'est pas envisageable physiquement). Que vaut alors la distance AA', entre l'objet et son image ?

✭ Exercice 14.

On considère un palet de masse m, posé sur un plan incliné. On suppose qu'il existe un frottement entre le palet et le support qui permet au palet de rester immobile. Comme indiqué sur la figure, les forces qui interviennent sont le poids $\overrightarrow{P}$, la réaction normale du support $\overrightarrow{R}_N$ et la force de frottement due au support $\overrightarrow{R}_T$.



L'application du principe fondamental de la dynamique projeté sur les axes (Ox) et (Oy) de la figure mène au système d'équations suivant (où g désigne l'accélération de la pesanteur) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} R_N - mg\cos(\alpha) & = & 0 & (E1) \\ mg\sin(\alpha) - R_T & = & 0 & (E2) \end{array}\right.$$

1. Donner l'expression de R_N et de R_T en fonction de m, g et α.

2. D'après la loi du frottement de glissement, le palet ne peut rester immobile que si R_T et R_N vérifient la relation suivante :

$$R_T < fR_N$$

   où f est le coefficient de frottement statique sur le support (c'est une constante). Déduire des relations obtenues précédemment la condition sur l'angle α et le coefficient f pour que le palet puisse rester immobile.

3. Le coefficient f entre un palet en bois poli et un support en métal vaut $f = 0,25$. Si on prend $\alpha = 10$, le palet restera-t-il immobile ? Et pour $\alpha = 20$?

Chapitre 2. Fonction d'une variable réelle

2.1. Domaine de définition, limites

★ **Exercice 1.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{x^3 - x^2 + 7}{x^2 + x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 14}$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$

d) $\sqrt{9 - x^2}$

e) $\dfrac{1}{1 - e^x}$

f) $\ln(x^2 - 7x + 12)$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \cos(x)$

h) $\dfrac{\sqrt{9 + x} - 3}{x} \sin(x)$

i) $\dfrac{|x^2 - 3|}{2 - x}$

j) $\sqrt{\cos(x)}$

k) $\cos(\sqrt{x})$

★ **Exercice 2.** Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(2\ln(x + 1) - \ln(x^2 + 1)\big)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \cos(\pi x)$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 2}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{(x + a)(x + b)} - x\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$

★ **Exercice 3.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$.

Donner le domaine de définition de f. La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

2.2. Dérivabilité

★ **Exercice 4.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a) $\dfrac{1-x}{2+x}$

b) $\dfrac{4-5x}{1-x^2}$

c) $\dfrac{x+2}{x-8}$

d) $\ln(1-x^2)$

e) $\ln(2x-x^3)$

f) $\ln(x^2+5x+4)$

g) $x^7 + x^{\frac{1}{7}}$

h) $\dfrac{1}{1-e^x}$

i) $\dfrac{1}{e^{3x}-5}$

j) $x^{\frac{11}{4}} + e^x + \dfrac{\sin(2x)}{\cos(x)}$

k) $\sqrt{x^2-2x}$

l) $\sqrt{1+(2x+1)^3}$

m) $\dfrac{\tan(x)-2}{\sin(x)}$

n) $\sqrt{1+x^2\sin(x)}$

o) $\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

★ **Exercice 5.** Faire une étude complète de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

Déterminer son domaine de définition, calculer sa dérivée, ses limites, dresser son tableau de variation et tracer sa représentation graphique.

★ **Exercice 6.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-4}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

3. Déterminer les limites de f, son tableau de variation et ses asymptotes.
4. Donner la représentation graphique de f.

★ **Exercice 7.** Soit f la fonction définie par $f(x) = (\sin(x))^2 \cos(2x)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Calculer la dérivée et donner la tableau de variation de f.
4. Donner le représentation graphique de f.

★ **Exercice 8.** Trouver les asymptotes (horizontales, verticales, obliques) des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{3x+5}{x+2} - x$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{5 - x^2}$

d) $i(x) = \dfrac{2x^5 - x^4 - 9x^2 + 2x}{x^4 + 1}$

★ **Exercice 9.** A l'aide d'études de fonctions, démontrer que :

1. Pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
2. Pour tout $x \geq 0$, $(x-2)e^x + (x+2) \geq 0$.

2.3. Fonctions réciproques

★ **Exercice 10.**

1. Rappeler la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque puis appliquer cette formule à la fonction $f(x) = \tan(x)$. Donner ainsi la dérivée de la fonction $g(x) = \arctan(x)$.
2. Faire de même pour $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \arccos(x)$, puis pour $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \arcsin(x)$.

★ **Exercice 11.** Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.

1. Faire une étude complète de la fonction f (domaine de définition, dérivée, limites, tableau de variation, représentation graphique).
2. Démontrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
3. Donner l'expression explicite de la réciproque f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

★ **Exercice 12.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Faire une étude complète de la fonction f.
2. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
3. Donner l'expression de la réciproque f^{-1}.

★ **Exercice 13.** Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \exp(\ln^2(x))$.

1. Faire une étude complète de la fonction f.
2. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
3. Donner l'expression de la réciproque f^{-1}.

2.4. Développements limités

★ **Exercice 14.** Donner les développements limités aux ordres indiqués des fonctions suivantes :

1. A l'ordre 3 en 0 de $\sin(3x) + \cos(x)$.
2. A l'ordre 3 en 0 de $e^x + \ln(1 + x^2)$.
3. A l'ordre 2 en 0 de $2xe^x$.
4. A l'ordre 6 en 0 de $(e^x - 1)(\sin(x) - x)$.
5. A l'ordre 5 en 0 de $\sin(x)\ln(1 + x)$.
6. A l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1 + x}$.
7. A l'ordre 6 en 0 de $\sqrt{1 - x^2}$.
8. A l'ordre 3 en 0 de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

★ **Exercice 15.** Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = (\cos(x))^2$ et $g(x) = e^{-\sin(x^2)}$.

1. Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 de f et g.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - g(x)}{x^4}$
3. En procédant comme dans les questions précédentes, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2) - e^x}{\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x^2}{x^4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2\sin(x)} - 1}{2x^3 + x^4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} - \sqrt{2}}{x^2}$

★ **Exercice 16.** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$ avec a, b et c des réels strictement positifs.

2.5. Applications

★ **Exercice 17.** Un objet lancé dans le champ de pesanteur (d'intensité constante g), avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale, adopte une trajectoire parabolique d'équation :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$$

où y désigne l'altitude du point et x sa position horizontale.

1. Déterminer la position x à laquelle le point atteint l'altitude maximale de sa trajectoire.
2. En déduire l'expression de cette altitude, notée y_{max}, en fonction de v_0, g et α.
3. Pour une vitesse initiale v_0 donnée, quelle valeur de l'angle α faut-il choisir pour que l'altitude maximale y_{max} soit la plus élevée possible ? Que vaut-elle alors ?

★ **Exercice 18.** Dans certains circuits électriques contenant condensateurs et bobines, on peut observer des phénomènes dits de "résonance" : la tension aux bornes d'un des composants du circuit peut devenir très grande (supérieure à la tension fournie par le générateur). Pour savoir si un tel phénomène peut se produire, on doit étudier la fonction de transfert du circuit. On suppose que dans un certain circuit la fonction de transfert s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

où le paramètre Q désigne le facteur de qualité, constante positive qui dépend essentiellement des résistances présentes. On va chercher si la fonction de transfert peut admettre un maximum : on dira alors qu'il y a résonance (on précise que la variable x ne peut prendre que des valeurs positives).

1. Expliquer pourquoi il suffit de chercher les minimums de la fonction dans la racine au dénominateur pour savoir si f admet un maximum.
2. Vérifier si la fonction $g(x) = 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2$ admet un minimum, et si oui pour quelle valeur de x celui-ci est atteint.
3. Quelle est la valeur de la fonction f à son maximum ? Dépend-elle du facteur de qualité Q du circuit ?

★ **Exercice 19.** L'énergie émise par un corps noir (une planète, une étoile, etc) de température T à la longueur d'onde λ vaut

$$E(\lambda, T) = \frac{a}{\lambda^5 \exp(\frac{b}{\lambda T})}$$

où $a = 3,710^{-16}$ kg.m^4.s^{-3} et $b = 1,44.10^{-2}$ K.m sont deux constantes. Montrer qu'à une température T fixée, l'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_{max} que l'on déterminera en fonction de T.

★ **Exercice 20.** Un fabricant produit des boîtes de conserve cylindriques, de volume 1 litre. Il veut déterminer quelles dimensions il doit choisir pour utiliser le moins de métal possible.

1. En notant h la hauteur et r le rayon de la boite, déterminer une relation liant h et r.
2. Déterminer la surface de métal S utilisée pour faire la boite en fonction de h et r.
3. En déduire une expression de S uniquement en fonction de r.
4. Déterminer une expression du rayon r_{min} pour lequel cette fonction est minimale.
5. En déduire la hauteur h_{min} et la surface S_{min} correspondants.
6. Donner les résultats numériques (on rappelle que 1 litre $=$ 1 dm^3).

Chapitre 3. Nombres complexes

3.1. Écriture algébrique

★ **Exercice 1.** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $(2+5i)+(i+3)$

b) $4(-2+3i)+3(-5-8i)$

c) $(2-i)(3+8i)$

d) $i(1-3i)^2$

e) $(1+i)^3$

f) $(3+4i)+(-4+3i)$

g) $(1-i)\overline{(1+i)}$

h) $\left(\dfrac{1}{2}+i\right)+\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{2}i\right)$

i) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\right)-\left(\dfrac{1}{2}-i\right)$

j) $\dfrac{1}{i}$

k) $\dfrac{1}{1+i}$

l) $\dfrac{1}{2+3i}$

m) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

n) $\dfrac{3i-5}{2+i}$

o) $\dfrac{a+i}{1-ia}$, $\quad a\in\mathbb{R}$

★ **Exercice 2.** On pose z le nombre complexe défini par $z=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer z^2.

2. Montrer que $1+z+z^2=0$ et $z^3=1$.

3. Donner la forme algébrique des nombres suivants :

   a) $1+z$ b) $1-z$ c) $1+z^2$ d) $1-z^2$ e) $\dfrac{1+z}{1-z}$ f) iz^2

4. Calculer $z^{365}+z^{441}+z^{2020}$.

★ **Exercice 3.** Soit z le nombre complexe défini par $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) z^2-1

b) $\dfrac{\overline{z}}{z}$

c) $\dfrac{iz}{\overline{z}}$

3.2. Module et argument

★ **Exercice 4.** Calculer le module des nombres complexes suivants, puis les mettre sous forme exponentielle.

a) $1+i$

b) 2

c) $-i$

d) $1+i\sqrt{3}$

e) $(-1+i)(-3+i)(-5+i)$

f) $1+i\sqrt{3}$

g) $(i-1)^3$

h) $\dfrac{7}{(2-i)^2}$

i) $\dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

j) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$

k) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$

l) $\dfrac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$

m) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

n) $\dfrac{a+i}{1-ia}, \quad a\in\mathbb{R}$

★ **Exercice 5.** Soit z le nombre complexe défini par $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. Exprimer, en fonction de x et de y, le module des nombres complexes suivants :

a) $\overline{z}+1$

b) $1-\dfrac{1}{z}$

c) z^2-1

★ **Exercice 6.** Soit z le nombre complexe défini par $z=re^{i\theta}$ avec $r\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer, en fonction de r et de θ, le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) z^2

b) $\overline{z}$

c) $\frac{1}{z}$

d) $-z$

e) z^n

★ **Exercice 7.** On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1=1+i\sqrt{3}\,,\quad z_2=1+i\,,\quad z_3=\frac{z_1}{z_2}$$

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. En déduire z_3 sous forme trigonométrique.

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3.3. Résolution d'équations

★ **Exercice 8.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en écrivant les solutions sous forme algébrique.

a) $z + 2i = iz - 1$.

b) $(3+2i)(z-1) = i$.

c) $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$.

d) $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$.

e) $2z + i = \overline{z} + 1$.

f) $2z + \overline{z} = 2 + 3i$.

g) $2z + 2\overline{z} = 2 + 3i$.

h) $z^2 - (4+2i)z + 2 + 4i = 0$.

i) $3z^2 + (2+3i)z - \frac{1}{4} + i = 0$.

j) $z^2 + (-3+7i)z - 10 - 15i = 0$.

k) $2z^2 + 5z + 11 - 2i = 0$.

l) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

m) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

n) $(2z-1)^4 = z^4$.

★ **Exercice 9.** Soit (E) l'équation d'inconnue complexe $z \in \mathbb{C}$ définie par

$$(E)\ :\ z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai de (E).
2. Déterminer b et c dans $\mathbb{R}$ tels que $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z-ai)(z^2+bz+c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

★ **Exercice 10.** On pose $P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i$.

1. Calculer $P(-1-i)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3.4. Linéarisation

★ **Exercice 11.** En utilisant la formule d'Euler, linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^4(x)$

b) $\sin^5(x)$

c) $\sin^3(4x)$

d) $\sin^2(3x) + \cos^3(2x)$

e) $\sin^2(x)\cos^3(x)$

f) $\sin^6(x) + \cos^6(x)$

★ **Exercice 12.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
2. En déduire les formules suivantes :
   (a) $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
   (b) $(\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

Chapitre 4. Intégration

4.1. Calcul de primitives

★ **Exercice 1.** Détermine une primitive pour chacune des expressions suivantes :

a) $3x^2 + 7x^{34}$

b) $\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{1}{x^2+1}$

d) $\dfrac{2x}{x^2+1}$

e) $\sin(13x)$

f) $\cos\left(\dfrac{x}{13}\right)$

g) e^{2x}

h) $2xe^{x^2}$

i) $10 - 3e^x + x$

j) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$

l) $\sin^5(x)$

m) $\cos(x)\sin^2(x)$

n) $\dfrac{5}{x-3}$

o) $\dfrac{1}{5+8x}$

p) $\dfrac{18x^2+60x-6}{x^3+5x^2-x+7}$

q) $\dfrac{2x+1}{1+x^2}$

r) $\dfrac{x^2}{x+1}$

★ **Exercice 2.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3+2}$.

1. Factoriser le dénominateur de f, puis donner son domaine de définition.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que
$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$
3. En déduire une primitive de f.

★ **Exercice 3.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^4-3x^3+3x^2+5x-9}{x^2-3x+2}$.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 5X - 9$ par $X^2 - 3X + 2$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$.
3. En déduire une primitive de f.

★ **Exercice 4.** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx.$

4.2. Intégration par parties

★ **Exercice 5.** En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^4 xe^x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^5 \ln(4x-1)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\,dx$

f) $\displaystyle\int_2^4 \ln(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin(x)\,dx$

★ **Exercice 6.** Soit $n \geq 1$. On considère les deux intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx$$

1. En intégrant par parties de deux façons différentes, montrer que pour tout $n \geq 1$

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

2. En déduire les valeurs de I_n et J_n.

4.3. Changement de variable

★ **Exercice 7.** En utilisant la méthode du changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\,dx$ $\quad(t = \sqrt{x+1})$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(x))^3 \sin(x)\,dx$ $\quad(t = \cos(x))$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx$ $\quad(t = \sin(x))$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+2e^{-x}}\,dx$ $\quad(t = e^x)$

★ **Exercice 8.**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que
$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$
2. Calculer les trois intégrales suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$
3. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$.
4. En déduire la valeur de
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)\sin(t)}{(1+\sin(t))(1+\sin^2(t))}\,dt$$

4.4. Applications

★ **Exercice 9.** Un laboratoire a mis au point un traitement contre une maladie. Ce traitement consiste en n injections successives d'un produit dans le sang, n étant un entier strictement positif. Afin de ne pas engendrer d'effets secondaires chez le patient, ces injections sont espacées d'au moins 8 heures. La concentration du médicament dans le sang, en grammes par litre, x heures après la $n^{\text{ième}}$, injection est modélisée par la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; 7]$ par :
$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x^n}.$$
Les observations ont conduit à observer que le traitement est efficace après la $n^{\text{ième}}$ injection si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $f_n(2) > 0,65$,

(i) f_n est strictement positive sur l'intervalle $]0;7]$,

(iii) la concentration moyenne en g/L du médicament dans le sang entre la $1^{\text{ère}}$ et la $7^{\text{ième}}$ heure lors de la $n^{\text{ième}}$ injection est strictement supérieure $0,6$.

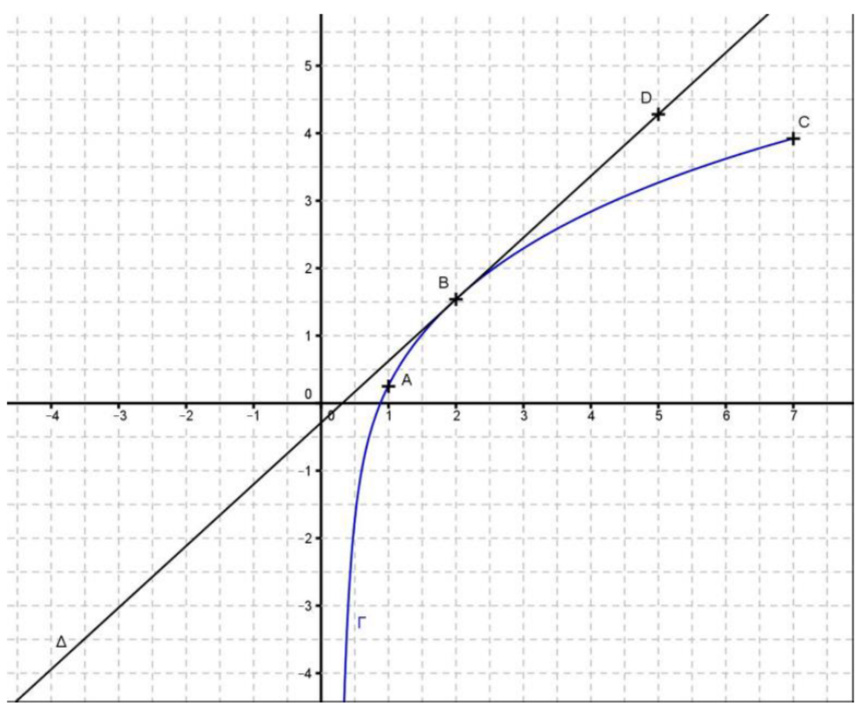
On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un segment $[a;b]$ est égale à

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

On commence par tester l'efficacité de ce traitement après une seule injection.

1. La fonction f_1 vérifie-t-elle la condition (i) ?
2. Étudier le signe de f_1 sur $]0;7]$. Que peut-on en déduire ?
3. Dériver la fonction $g(x) = -(2 - ln(x))^2$, puis calculer $\int_1^7 f_1(x)\mathrm{d}x$. La condition (iii) est-elle vérifiée ?
4. Est-il nécessaire de poursuivre les injections pour que le traitement soit efficace ?

On teste maintenant l'efficacité après 3 injections successives. Le graphique ci-dessous représente la courbe Γ d'une fonction F_3 définie et dérivable sur $]0;7]$ qui admet la fonction f_3 comme dérivée sur $]0;7]$. Attention, ce n'est pas le graphe de la fonction f_3 elle-même !



Le plan est muni d'un repère orthonormé et les coordonnées des points ont été arrondies au centième, en réalité la courbe Γ passe par les points $A(1; 0,25)$, $B(2; 1,54)$ et $C(7; 3,92)$. On désigne par Δ la droite tangente à Γ au point B. Cette tangente passe par le point D de coordonnées $(5; 4,28)$.

5. Que représente la fonction F_3 pour la fonction f_3 ?
6. La fonction f_3 vérifie-t-elle la condition (ii) ?
7. Comment interpréter graphiquement le nombre $f_3(2)$? La fonction f_3 vérifie-t-elle la condition (i) ?
8. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de l'intégrale $\int_1^7 f_3(x)\mathrm{d}x$. La condition (iii) est-elle vérifiée ?
9. Que penser de l'efficacité du traitement après 3 injections ?

Chapitre 5. Équations différentielles

5.1. Équations linéaires d'ordre 1

★ **Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $7y'(t) + 2y(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$

b) $y'(t) + 2y(t) = t^2 - 2t + 3$

c) $y'(t) + y(t) = te^{-t}$

d) $y'(t) - 2y(t) = \cos(t) + 2\sin(t)$

e) $y'(t) + t^2 y(t) = -t^2$

f) $2ty'(t) - y(t) = t$

g) $y'(t) - \dfrac{t}{1+t^2}\, y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

h) $y'(t) - \dfrac{1}{t^2}\, y(t) = \dfrac{1}{t^2}$

i) $y'(t) - \dfrac{1}{t}\, y(t) = 3t^3$

j) $y'(t) - \dfrac{1}{t^3}\, y(t) = \dfrac{1}{t^5}$

k) $y'(t) + y(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

l) $(1+t)y'(t) + y(t) = 1 + \ln(1+t)$

m) $y'(t) - \dfrac{1}{t}\, y(t) = t^2$

n) $y'(t) - 2ty(t) = -(2t-1)e^t$

o) $y'(t) - \dfrac{2}{t} y(t) = t^2$

★ **Exercice 2.** Déterminer la solution exacte de chacun des systèmes différentiels suivants :

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + 2y(t) & = & -4 \\ y(1) & = & -3 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) - y(t) & = & 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) - y(t) & = & t^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,y'(t) - 3y(t) & = & 9 \\ y(-1) & = & 1 \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) - y(t) & = & 15 - 17t + 12t^2 \\ y(0) & = & 10 \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + \frac{1}{t\ln(t)}\, y(t) & = & \frac{1}{t} \\ y(e) & = & 3 \end{array} \right.$

g) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + \tan(t) y(t) & = & \sin(t) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$

h) $\left\{ \begin{array}{rcl} (t+1)y'(t) + ty(t) & = & t^2 - t + 1 \\ y(1) & = & 1 \end{array} \right.$

5.2. Équations linéaires d'ordre 2

★ **Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0$

b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

c) $y''(t) - 2y'(t) + 5y'(t) = 0$

d) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 1$

e) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$

f) $y''(t) + 9y(t) = t + 1$

g) $y''(t) - y(t) = e^{2t} - e^t$

h) $y''(t) + y'(t) + y(t) = \cos(t)$

i) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin^2(t)$

j) $y''(t) + y'(t) + y(t) = e^t \cos(t)$

k) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$

l) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^t$

m) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (t^2+1)e^t + e^{3t}$

n) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = t^2e^t + te^{2t}\cos(t)$

o) $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = -4e^{-t}\cos(t) + 7e^{-t}\sin(t) - 4e^t\sin(2t)$

5.3. Équations à variables séparables

★ **Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $\begin{cases} y'(t) + e^{t-y(t)} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'(t) = \frac{t}{1+y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'(t) + ty^2(t) = -t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} t^3y'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

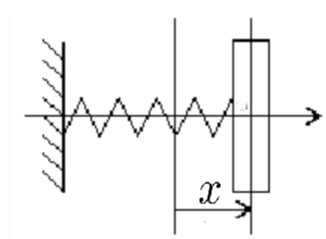
e) $\begin{cases} y'(t) + y^2\sin(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ty'(t) = (t+1)y^2(t) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

5.4. Applications

★ **Exercice 5.**

Un objet de masse m est fixé à un ressort horizontal immergé dans un fluide caractérisé par sa constante de raideur k et un coefficient d'amortissement c. On note $x(t)$ la position horizontale de l'objet par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps t.



Le problème est modélisé par l'équation différentielle suivante dont $x(t)$ est solution :

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

On considère ici $m = 2$, $c = 2$ et $k = 5$.

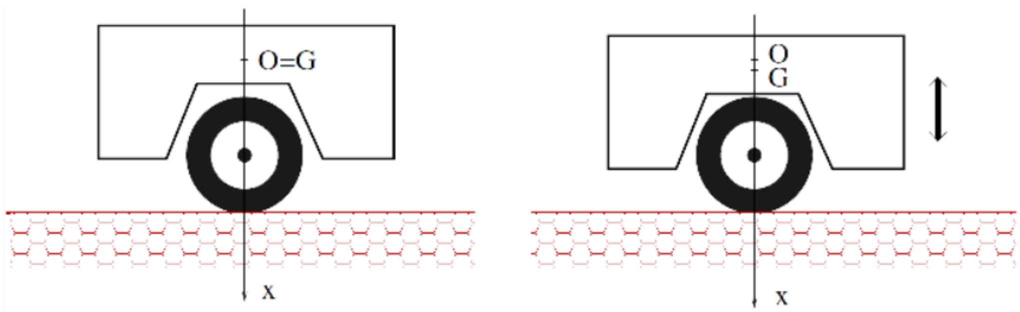
1. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

2. On suppose qu'au temps $t = 0$, l'objet est en position $x(0) = 2$ et de vitesse initiale $x'(0) = 3\sqrt{3} - 1$. Déterminer alors l'unique solution correspond à ces données initiales.

3. Quelle est la limite de $x(t)$ lorsque le temps t tend vers $+\infty$?

4. Déterminer le plus petit temps t_0 tel que $x(t_0) = 0$.

★ **Exercice 6.** On souhaite étudier la suspension d'une remorque. Le centre d'inertie G de la remorque se déplace sur un axe vertical $(0x)$ dirigé vers le bas : il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M reposant sans frottement sur un ressort.



Le problème est modélisé par l'équation différentielle suivante dont $x(t)$ est solution :

$$Mx''(t) + kx(t) = 0$$

où k désigne la raideur du ressort. On prendra $M = 250\ kg$ et $k = 6250\ N.m^{-1}$.

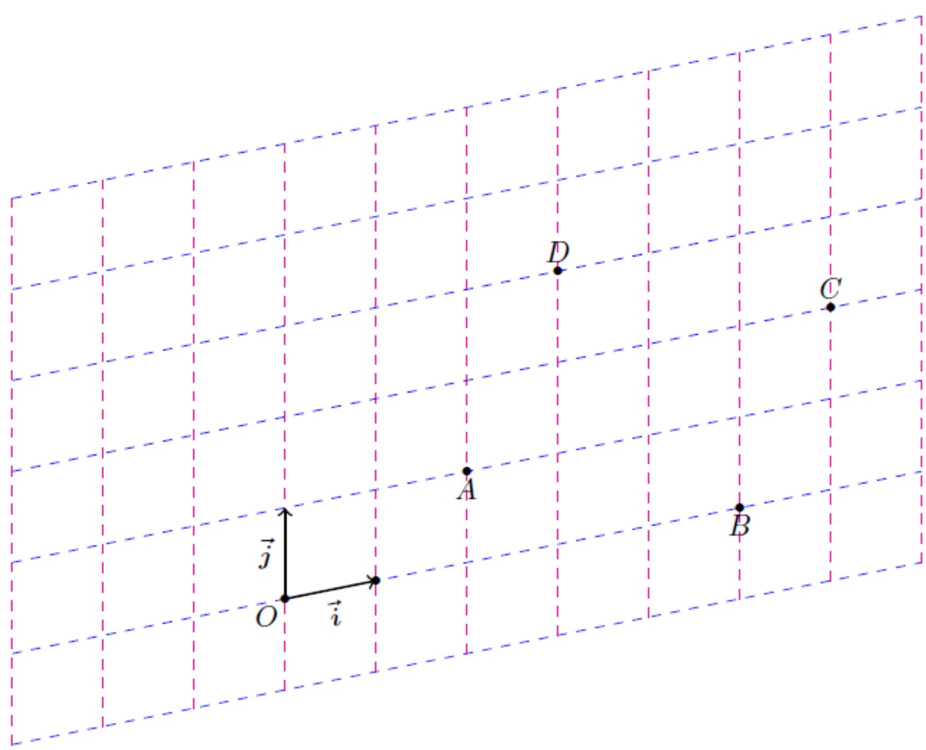
1. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

2. On suppose qu'au temps $t = 0$, l'objet est en position $x(0) = 0$ et de vitesse initiale $x'(0) = -0,1$. Déterminer alors l'unique solution correspond à ces données initiales.

Chapitre 6. Vecteurs

6.1. Coordonnées cartésiennes et base

★ **Exercice 1.** On considère le plan muni du repère $R = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ ci-dessous. Les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment donc une base du plan, que l'on note B.



1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D dans le repère R.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans la base B. Que peut-on en conclure ?

3. Sans calculer les coordonnées de ces vecteurs, mais à l'aide de la la formule de Chasles, montrer l'égalité $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

★ **Exercice 2.** On considère le plan muni d'un repère $R = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. Les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment donc une base du plan, que l'on note B. Les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas supposés être perpendiculaires. On considère de plus les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{x}$ dont les coordonnées dans la base B sont données par

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. Faire un dessin de la situation.
2. Montrer que le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base du plan, que l'on note C.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette nouvelle base.
4. Montrer que le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x})$ ne forme pas une base du plan.

6.2. Produits, norme et déterminant

★ **Exercice 3.** On considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer tous les produits scalaires possibles et en déduire les angles formés par les vecteurs.
2. Calculer la norme euclidienne de chaque vecteur.
3. Calculer tous les produits vectoriels possibles.
4. Pour quels couples de vecteurs peut-on effectuer la somme ? Vérifier l'inégalité triangulaire dans tous les cas cités.

★ **Exercice 4.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -6$. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $(3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (-2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v})$ b) $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\right)$

★ **Exercice 5.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$. Calculer le déterminant suivant :

$$\det(5\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}).$$

★ **Exercice 6.** Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A.

1. Calculer le déterminant formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer le déterminant formé par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

3. Montrer que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

6.3. Coordonnées polaires

★ **Exercice 7.** Soit $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan muni du produit scalaire.

1. Calculer les coordonnées polaires de points M, M' et M'' dont les coordonnées dans R sont données par

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M'' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les coordonnées cartésiennes des points N et N' dont les coordonnées polaires sont données par

$$\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)_N, \quad \left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)_{N'}$$

★ **Exercice 8.** Soit $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan muni du produit scalaire. Soient A, B et C les points dont les coordonnées dans R sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Faire un dessin de la situation.

2. A l'aide d'une calculatrice, calculer les coordonnées polaires des points A, B et C.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et le déterminant $\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ exprimée en degrés et en radians.

6.4. Applications

★ **Exercice 9.** On s'intéresse à une répartition de trois allèles A, B et C au sein de trois populations différentes (notée 1, 2 et 3). Leurs fréquences d'apparition sont récapitulées dans le tableau suivant :

	1	2	3
A	0,203	0,323	0,192
B	0,481	0,615	0,540
C	0,316	0,062	0,268

A chaque population, on associe le vecteur colonne dont les composantes sont les fréquences d'apparition des allèles.

1. Une première notion de distance génétique consiste à mesurer l'angle formé par deux vecteurs. Calculer cette distance entre chacune des populations.

2. Une autre notion de distance génétique entre deux population correspondants aux vecteur $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ consiste à calculer la norme

$$\|\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2}\|$$

   Calculer les nouvelles distances génétiques entre les populations et comparer les résultats obtenus avec ceux de la question précédente.

Chapitre 7. Éléments de calculs matriciels

7.1. Calcul matriciel

★ **Exercice 1.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer tous les produits matriciels possibles.

2. Donner les transposées de A, B et C et répéter la question précédente.

★ **Exercice 2.** On dit qu'une matrice M est **idempotente** lorsque son carré est égal à elle-même, et qu'elle est **nilpotente** lorsque $M^n = 0$ pour une certaine puissance $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est idempotente.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

★ **Exercice 3.** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA. Que peut-on en déduire ?

★ **Exercice 4.** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire la valeur de $A^7\,X$.

★ **Exercice 5.** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donner une condition sur les réels a, b, c et d pour que le produit AB soit nul.

★ **Exercice 6.** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1/2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA. Que peut-on en déduire ?

★ **Exercice 7.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.
2. Faire de même pour B.

★ **Exercice 8.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I$$

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.2. Calcul de déterminant

★ **Exercice 9.** Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} , \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3. Inversion de matrices

★ **Exercice 10.** Dire si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse dans les cas favorables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 11.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits AB et BA. Que peut-on en déduire ?

2. Calculer l'inverse de la matrice A.

7.4. Systèmes linéaires

★ **Exercice 12.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2z = 1 \\ -y+z = 2 \\ x-2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y = 0 \\ x+4y+z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+2z = 5 \\ x-y-z = 1 \\ x+z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z-3t = 1 \\ 2x+y-z+t = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ x+3y-z = 11 \\ 2x+5y-5z = 13 \\ x+4y+z = 18 \end{cases}$

★ **Exercice 13.** Discuter des solutions des systèmes suivants en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 3x+y-z = 1 \\ x-2y+2z = m \\ x+y-z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z = 1 \\ 3x+y-z = 1 \\ x-2y+2z = m \end{cases}$

7.5. Diagonalisation

★ **Exercice 14.** Diagonaliser les matrices suivantes en donnant la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad , C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

★ **Exercice 15.** Soient m un nombre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

7.6. Applications

★ **Exercice 16.** On étudie l'évolution dans le temps d'une population animale. A la date n (en années), cette population se divise en x_n jeunes et y_n adultes. L'année comporte une saison hivernale et une saison de reproduction. Lors de la saison hivernale, 40% des jeunes survivent et deviennent des adultes, et 80% des adultes survivent. Lors de la saison de reproduction, chaque adulte donne naissance à 2 jeunes. Tous les adultes survivent.

1. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
2. Écrire le système obtenu sous forme matricielle. Ce système est-il inversible ?
3. Calculer x_n et y_n en fonction des données du début de l'observation x_0 et y_0.

★ **Exercice 17.** Un agriculteur a livré à sa coopérative 30 tonnes de blé, 45 tonnes de tournesol et 75 tonnes de sorgho. Il touche à la fin de sa livraison un chèque de 234 M euros. Le prix de la tonne de blé est la moyenne du prix de la tonne de tournesol et du prix de la tonne de sorgho. D'autre part, s'il avait livré une tonne de chacune de ces céréales, il aurait été payé $5,1$ M euro.

On note x, y et z le prix à la tonne de chacune des céréales livrées (respectivement le blé, le tournesol et le sorgho).

1. Écrire le système linéaire satisfait par x, y et z sous forme d'un système d'équation puis sous forme matricielle.

2. Calculer le déterminant de la matrice associée au système. Ce dernier est-il inversible ?

3. Déterminer la solution du système en inversant la matrice associée.

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

✭ **Exercice 18.** On étudie une population de 100 souris qui se compose de mâles gris et de femelles blanches. On laisse la population de développer pendant un mois. A la fin, on dénombre 284 souris. On note x le nombre de mâles gris et y le nombre de femelles blanches au début de l'expérience. L'accouplement de souris donne une fois sur quatre une souris blanche et trois fois sur quatre une souris grise. En un mois, le nombre x de mâles gris a été multiplié par 2 et le nombre de femelles y a été multiplié par 3. On ne note pas de décès au cours de l'expérience.

1. Écrire le système linéaire satisfait par x et y sous forme d'un système d'équations puis sous forme matricielle.

2. Calculer le déterminant de la matrice associée au système. Ce dernier est-il inversible ?

3. Déterminer la solution du système en inversant la matrice associée.

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

5. Déterminer le nombre de souris blanches et grises à la fin du mois. Que peut-on en conclure ?

✭ **Exercice 19.** Une usine de biochimie fabrique des comprimés pharmaceutiques de 120 milligrammes contenant trois principes actifs P_1, P_2 et P_3 devant être présents dans chaque comprimé à raison respectivement de 30, 50 et 40 mg. Pour fabriquer ces comprimés, l'usine utilise trois matières premières M_1, M_2 et M_3 contenant chacune les trois principes actifs selon la répartition donnée dans le tableau suivant :

Principes actifs	M_1	M_2	M_3	Quantité de principe actif
P_1	1	2	4	30
P_2	2	4	3	50
P_3	2	3	1	40

1. On note x, y et z les quantités de matières premières M_1, M_2 et M_3 nécessaires pour fabriquer un comprimé. Donner le système linéaire satisfait par x, y et z fous forme d'équations puis sous forme matricielle.

2. Calculer le déterminant de la matrice associée au système. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

3. En déduire les quantités de matières premières x, y et z nécessaires à la fabrication d'un comprimé.

4. Retrouver ces mêmes quantités en utilisant la méthode du pivot de Gauss directement sur le système.

Chapitre 8. Fonctions de plusieurs variables

8.1. Domaine de définition

★ **Exercice 1.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et si possible, évaluer les fonctions aux points indiqués :

a) $f(x, y) = y^2 - 2x,$ $\quad (0, 0),\ (1, 1),\ (2, 2)$

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{2 - y},$ $\quad (0, 0),\ (1, 1),\ (2, 2)$

c) $f(x, y) = \ln(x)e^y,$ $\quad \left(\dfrac{1}{e}, 0\right),\ (1, 1),\ (e, -1)$

d) $f(x, y) = \sqrt{xy},$ $\quad (-1, -4),\ (1, 2),\ \left(18, \dfrac{1}{2}\right)$

e) $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2},$ $\quad (0, 0, 0),\ (2, 2, -2),\ (-2, 2\sqrt{2}, 2)$

f) $f(x, y, z) = \cos(x) + \sin(y) + \tan(z),$ $\quad (0, 0, 0),\ \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

8.2. Dérivabilité et points critiques

★ **Exercice 2.** Reprendre les fonctions de l'exercice 1 et calculer pour chacune les dérivées partielles. En déduire la jacobienne (si elle existe) et le gradients aux points indiqués. Calculer les dérivées secondes croisées. Que peut-on en déduire ?

★ **Exercice 3.** Déterminer les points critiques ainsi que leur nature pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

b) $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 3y + 5$

c) $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 - 6x + 2y$

d) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$

e) $f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}y^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 4y$

f) $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

★ **Exercice 4.** Une des formes connues de la loi des gaz parfait est la suivante :

$$PV = knT$$

où P est la pression du gaz, V le volume qu'il occupe, T sa température et n le nombre de molécules de gaz présentes dans le volume V. La constante k dépend du gaz étudié.

Montrer que

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

8.3. Champs de vecteurs

★ **Exercice 5.** Calculer les dérivées partielles ainsi que la matrice jacobienne pour chacun des champs de vecteurs suivants :

a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (y+x, y-x) \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{y+x}, \frac{1}{y-x}\right) \end{array}$

c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(x^2+y^2, \frac{1}{4-x^2-y^2-z^2}, \sqrt{z}\right) \end{array}$

★ **Exercice 6.** 1. Déterminer le gradient $\overrightarrow{grad}\ f$ et le laplacien Δf pour chacun des champs de vecteurs suivants :

a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & xy^2 - yz^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & xyz\sin(xy) \end{array}$

2. Déterminer la divergence $div\ f$ et le rotationnel $\overrightarrow{rot}\ f$ pour chacun des champs de vecteurs suivants :

a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x^2y, 2xy^2, xy) \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \big(\sin(xy), 0, \cos(xz)\big) \end{array}$

c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \big(x(2y+z), -y(x+z), z(x-2y)\big) \end{array}$

★ **Exercice 7.** Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ de vecteur et ΔF son laplacien (en coordonnées cartésiennes). On pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ (afin de passer en coordonnées polaires) et on définit

$$f(r, \theta) = F(r\cos(\theta), r\sin\theta))$$

Exprimer ΔF en fonction de f, r, θ et des dérivées partielles de f, et donner ainsi la nouvelle expression du laplacien en coordonnées polaires.

★ **Exercice 8.** On dit qu'un champ de vecteurs F **dérive d'un potentiel scalaire** s'il existe un champ scalaire f tel que $F = \overrightarrow{grad}\ f$.

Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire. Déterminer tous les potentiels dont ils dérivent.

a) $$\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2xy+z^3, x^2, 3xz^2) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^2 & \to & U \\ & (x,y) & \mapsto & \left(-\dfrac{y}{(x-y)^2}, \dfrac{x}{(x-y)^2}\right) \end{array} \text{ avec } U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y\}.$$

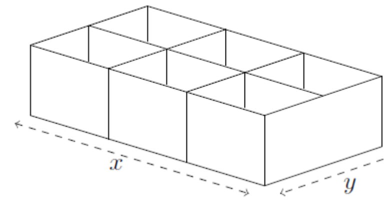
8.4. Applications

★ **Exercice 9.** On souhaite fabriquer un récipient métallique sans couvercle de base carrée de côté de longueur x, de hauteur h et de contenance V. On note S la quantité de métal nécessaire pour fabriquer ce récipient, sachant que l'on souhaite utiliser le moins de métal possible.

1. Exprimer S et V comme fonctions des deux variables x et h.
2. On suppose le volume V fixé. Exprimer la hauteur h en fonction de x.
3. En déduire S comme une fonction de la seule variable x, puis calculer sa dérivée.
4. Pour quelles valeurs de x cette dérivée s'annule-t-elle ?
5. En déduire les dimensions de la boîte qui minimisent la quantité de métal utilisée pour un volume de $4m^3$.
6. Recommencer pour un récipient d'une contenance de 1 dm^3 et possédant un couvercle.

✭ Exercice 10.

On souhaite construire un enclos de 6 cages de même taille, à partir de 300 m de clôture, selon le plan ci-contre. On note A la surface au sol de chaque cage, x la longueur totale de l'enclos, y sa largeur totale et L la longueur totale de clôture nécessaire.



1. Exprimer L et A comme fonctions des deux variables x et y.

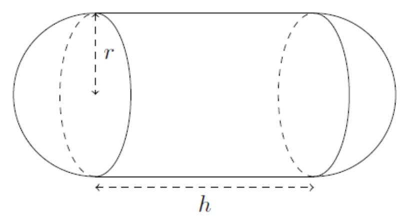
2. On suppose la longueur L fixée. Exprimer la largeur y en fonction de la longueur x.

3. En déduire A comme une fonction de la seule variable x, puis calculer sa dérivée.

4. Déterminer les dimensions de l'enclos qui maximisent la surface de chaque cage.

✭ Exercice 11.

On projette de construire un réservoir de stockage pour du gaz propane dont la forme soit un cylindre droit terminé par deux hémisphères selon la figure ci-contre. Le coût de la construction au mètre carré est deux fois plus élevé pour les parties sphériques que pour la partie cylindrique. On souhaite que le réservoir ait une capacité $V = \dfrac{2\pi}{3}\ m^3$.



1. On note c le coût de construction au m^2 du cylindre, exprimé en euros/m^2. Exprimer le coût global C (cylindre et sphères) en fonction des surfaces et de c. En déduire C comme fonction des deux variables r et h.

2. Exprimer le volume V en fonction de r et h.

3. On suppose le volume V fixé. Exprimer la hauteur h en fonction de r.

4. En déduire C comme une fonction de la seule variable r, puis calculer sa dérivée.

5. Déterminer les dimensions qui minimisent le coût de la construction de ce réservoir.
Indications : on rappelle la surface d'une sphère ($4\pi\, r^2$), son volume ($\frac{4}{3}\pi\, r^3$), ainsi que sa surface ($2\pi r h$). On rappelle également le volume d'un cylindre ($\pi r^2 h$).