TP1 Partie 1 - Etude de fonctions

I - Fonctions d'une variable réelle

Dans cette partie, nous allons apprendre à faire une étude complète de fonctions avec Maple. Celle-ci passe par le domaine de définition, de la continuité, des racines, des limites et asymptotes, de dérivée et de la dérivée seconde, des maxima et minima, des points d'inflexion, des symétries, puis par le tracé du graphe.

Prenons un exemple : $f(x) = \frac{1}{x-1}$. On commence par définir la fonction :

> $restart;$

> $f := x \rightarrow \frac{1}{x-1}$

$$f := x \mapsto \frac{1}{x-1} \quad \textbf{(1)}$$

On peut demande à Maple si la fonction f est bien continue, avec le commande `iscont`:

> $iscont(f(x), x = 0..10)$

$$false \quad \textbf{(2)}$$

> $iscont(f(x), x = 0..1)$

$$true \quad \textbf{(3)}$$

Le résultat donné par Maple est un booléen : true (vrai) si la fonction est continue sur l'intervalle, et false (faux) si elle ne l'est pas. A noter que Maple travaille par défaut avec des intervalles ouverts, et que si on veut prendre un intervalle fermé, il faut ajouter **closed** à la commande :

> $iscont(f(x), x = 0..1, 'closed')$

$$false \quad \textbf{(4)}$$

En effet, f n'est pas continue sur l'intervalle $[0, 1]$ fermé mais sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, car f est discontinue en 1. Il est possible de demander directement à Maple les points de discontinuités de f, avec la commande `discont` :

> $discont(f(x), x);$

$$\{1\} \quad \textbf{(5)}$$

L'intervalle de définition de f est donc l'ensemble $R \setminus \{1\}$. On peut à présent calculer la dérivée de f :

> $df := x \rightarrow diff(f(x), x)$

$$df := x \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) \quad \textbf{(6)}$$

> $df(x)$

$$-\frac{1}{(x-1)^2} \tag{7}$$

L'étude du signe de la dérivée nous donne les variations de f ainsi que les extrema. On résout pour cela l'équation $f'(x)=0$ et l'inéquation $f'(x) \leq 0$ à l'aide de la commande `solve` (le symbole "supérieur ou égal" est obtenu avec la commande <=) :

> $solve(df(x)=0, x);$
> $solve(df(x) \leq 0, x);$

$$(-\infty, 1), (1, \infty) \tag{8}$$

La première commande ne fournit aucun résultat : l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution. De plus, cette dérivée est strictement négative : f est donc strictement décroissante sur R. On peut vérifier que f n'admet pas d'extrema sur R :

> $minimize(f(x), x); maximize(f(x), x)$

$$-\infty$$
$$\infty \tag{9}$$

On peut aller plus loin en étudiant le signe de la dérivée seconde afin de connaître la convextié/concavité de f :

> $dff := x \rightarrow diff(df(x), x); dff(x)$

$$dff := x \rightarrow \frac{d}{dx}\, df(x)$$
$$\frac{2}{(x-1)^3} \tag{10}$$

> $solve(dff(x) \geq 0)$

$$(1, \infty) \tag{11}$$

Ainsi, f est convexe sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Etudions à présent ses limites, ce qui nous donnera en particulier les éventuelles asymptotes de f.

> $limit(f(x), x=+\text{infinity}); limit(f(x), x=-\infty)$

$$0$$
$$0 \tag{12}$$

Ainsi, f admet une asymptote horizontale en $y=0$. On sait aussi que f admet un point de discontinuité en 1, on peut étudier ses limites à gauche et à droite :

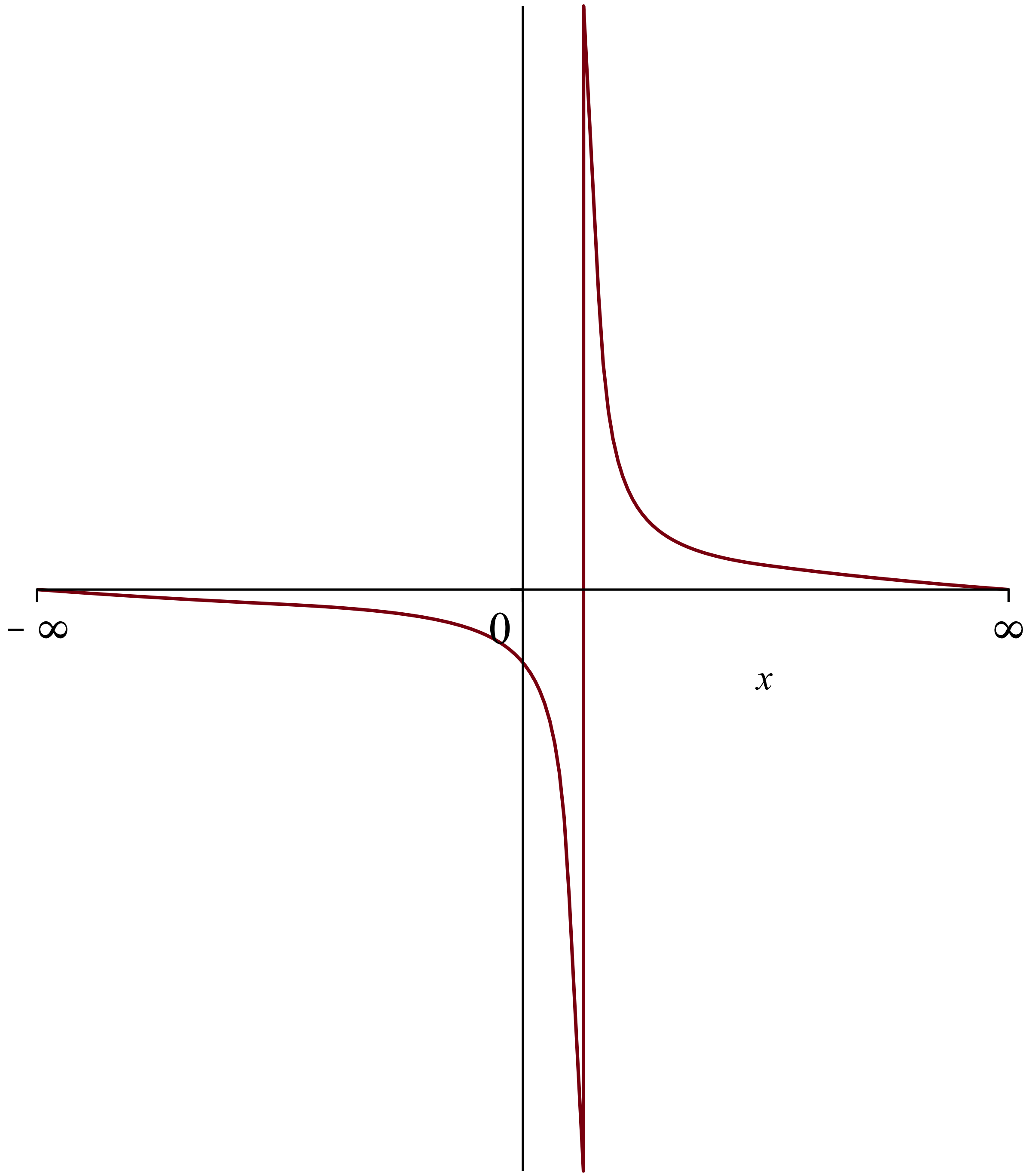
> $limit(f(x), x=1, right); limit(f(x), x=1, left)$

$$\infty$$
$$-\infty \tag{13}$$

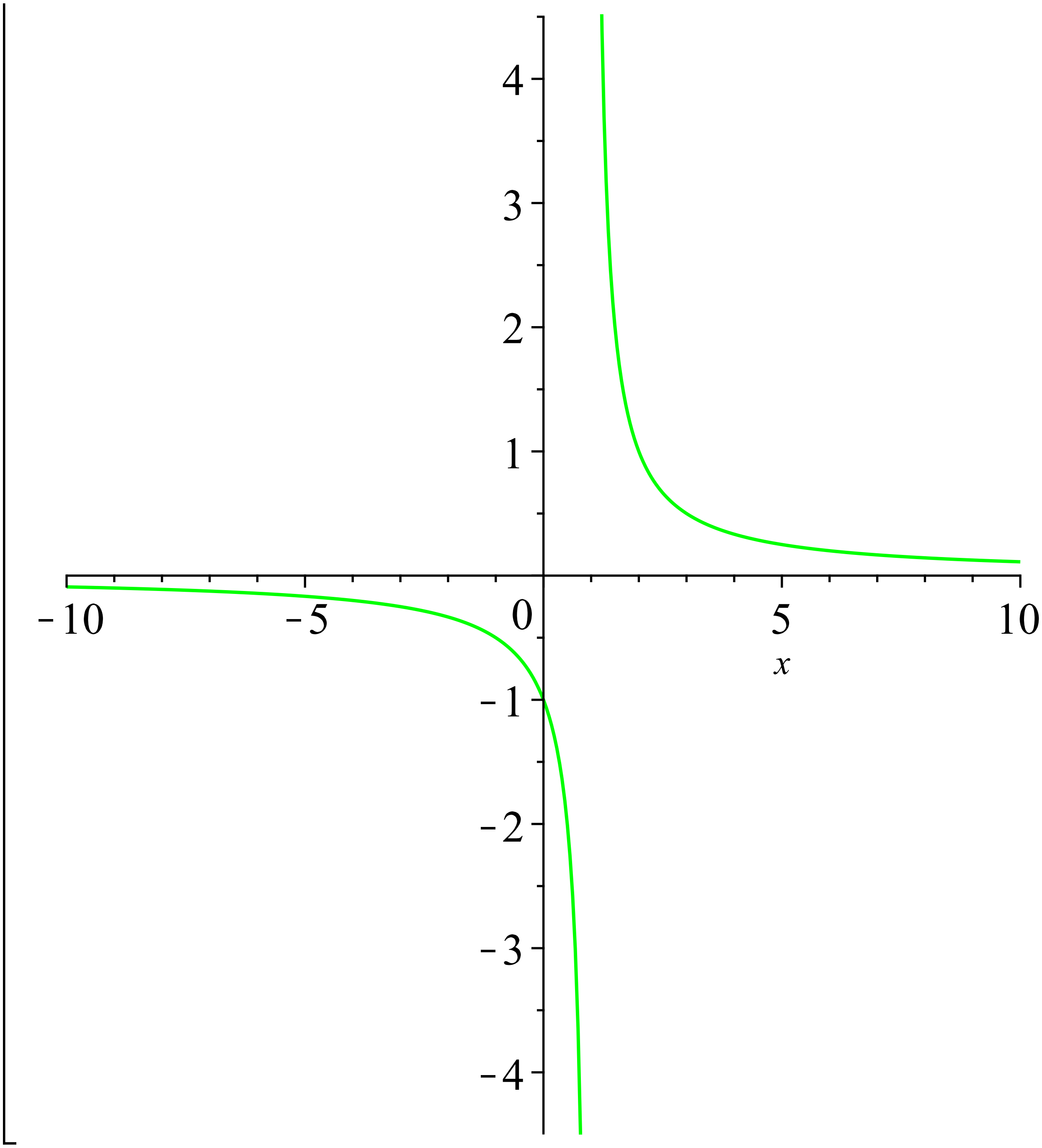
D'après la réponse précédente, f admet une asymptote verticale en 1. On peut à présent donner la représentation graphique de f :

(14)

> $plot(f(x), x=-\text{infinity}..\text{infinity});$



> $plot([f(x)], color = [green], discont = true)$



Pour finir, il est possible de donner une primitive de f :

> $int(f(x), x)$

$$\ln(x-1) \tag{15}$$

ou simplement de calculer son intégrale sur un intervalle donné :

> $int(f(x), x = 2..3)$

$$\ln(2) \tag{16}$$

> $int(f(x), x = 1..5)$

$$\infty \tag{17}$$

Ce dernier résultat nous indique que l'intégrale de f sur l'intervalle $]1, 5[$ vaut $+\infty$. On dit que f n'est pas intégrable sur cet intervalle. Vérifier par le calcul pourquoi on obtient ce résultat.

Exercice 1.

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^3 - 8x + 13$
b) $g(x) = \dfrac{(x^2 - x - 6)^2 - (x - 3)}{x^2 - 4x + 3}$
c) $h(x) = \exp(-(x-1)^2) - \exp(-(x+1)^2)$
d) $i(x) = x^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$

II - Fonctions de plusieurs variables

Nous aurons l'occasion d'étudier des fonctions de plusieurs variables réelles dans les séances de TD. On appelle ça des champs de vecteurs (ou champs scalaires, si le domaine d'arrivée de la fonction est réelle). On peut représenter de telles fonctions avec Maple.

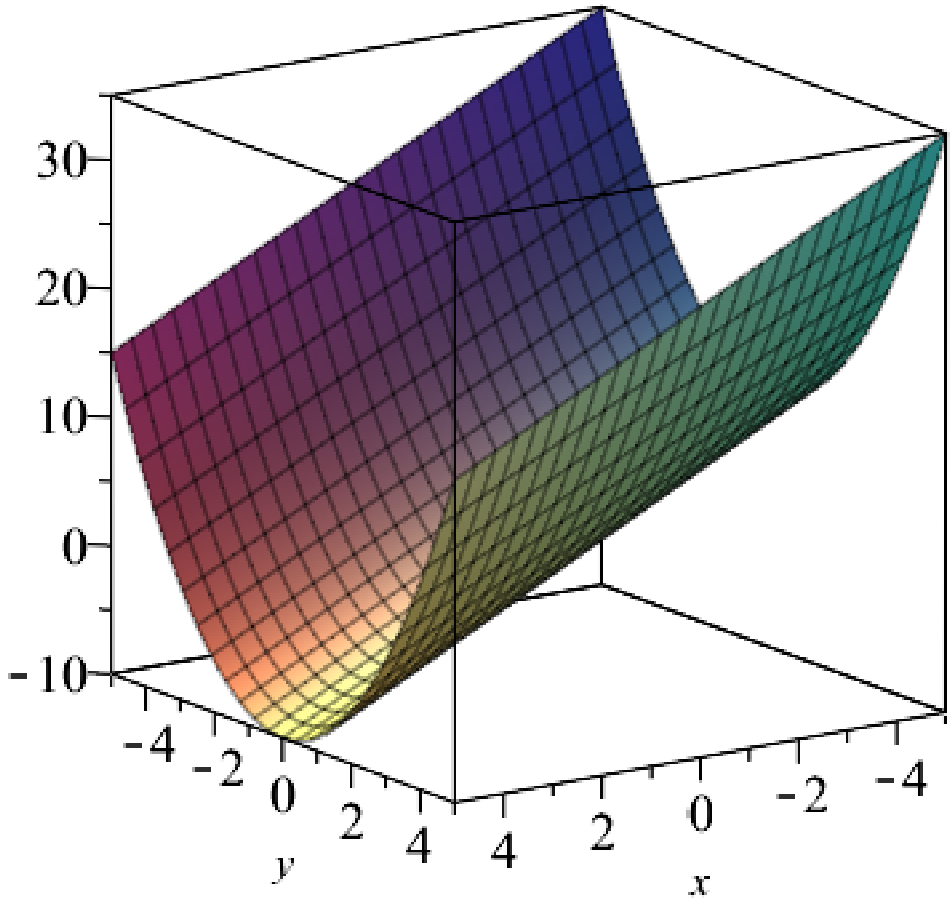
Par exemple, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface.

```
> restart;
```

```
> f := (x, y) -> y^2 - 2·x
```

$$f := (x, y) \mapsto y^2 - 2x \tag{18}$$

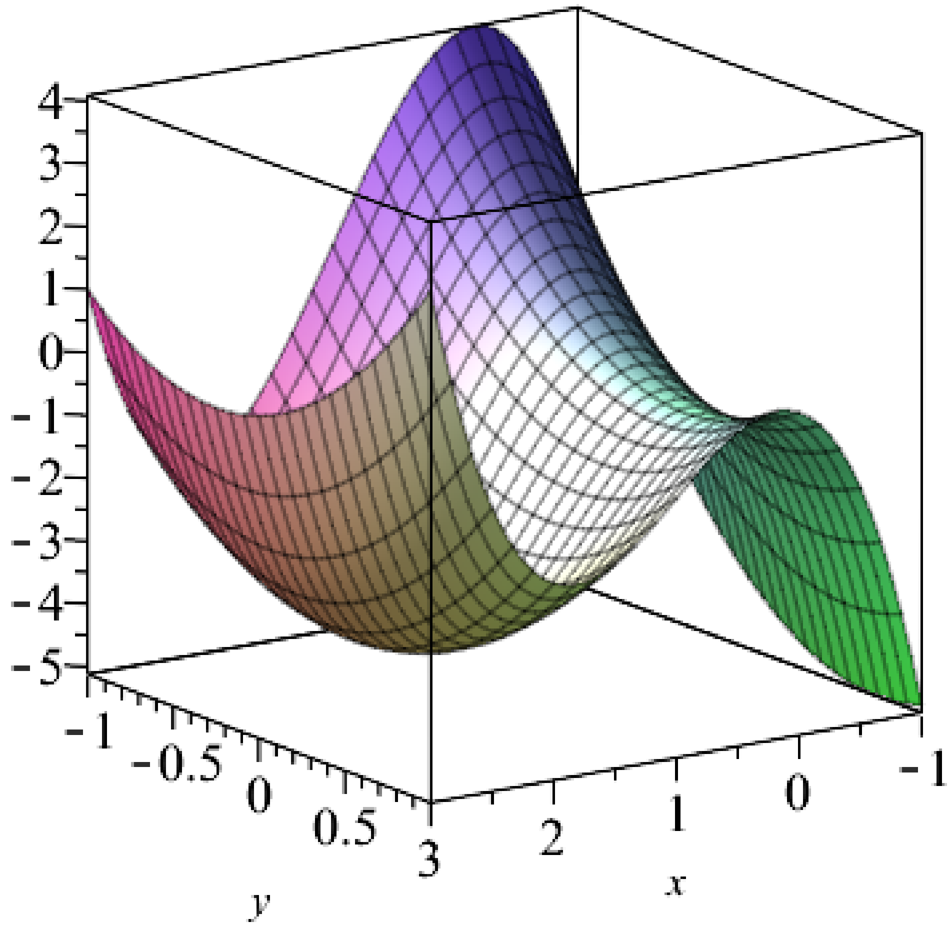
```
> plot3d([f(x, y)], x = -5..5, y = -5..5)
```



> $g := (x, y) \rightarrow x^3 + x \cdot y - 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,y$

$$g := (x, y) \mapsto x^3 + x\,y - 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,y \quad (19)$$

> $plot3d([g(x, y)], x = -1..3, y = -1..1)$



Comme pour les fonctions d'une variable réelle, il est possible d'étudier les extrema de ces fonctions en passant par l'étude des dérivées partielles, du gradient et de la matrice Hessienne. Par exemple, la première fonction a l'air d'admettre un minimum, tandis que la deuxième possède un point "selle" (car la surface a une allure de selle de cheval). Cela signifie que la fonction possède un extremum mais pour une seule des deux variables. A noter que cette fonction a également l'air d'admettre un minimum. Tout cela passe par l'étude des points critiques, via les dérivées partielles et dérivées partielles secondes. Nous verrons cela dans le TP2.