TP1 Partie 3 - Résolution d'équations différentielles

Il est possible de résoudre certaines équations différentielles avec Maple. Prenons par exemple l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{2} y(x) = x$. Pour l'écrire, on entre la commande suivante :

$$> \; eq1 := diff(y(x), x) + \frac{1}{2} \cdot y(x) = x$$

$$eq1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + \frac{y(x)}{2} = x \tag{1}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la commande `dsolve` :

$$> \; sol1 := dsolve(eq1, y(x))$$

$$sol1 := y(x) = 2\,x - 4 + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\_C1 \tag{2}$$

Cette solution est donnée sous forme d'une égalité, et qu'une constante $C1$ apparaît (avec la syntaxe _C1). Si on veut "récupérer" cette solution et par exemple la représenter dans un graphique, on peut la réécrire (en posant C une constante, utilisant la syntaxe C:='C') ;

$$> \; C := 'C'; ysol1 := 2 \cdot x - 4 + C \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

$$C := C$$

$$ysol1 := 2\,x - 4 + C\,e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

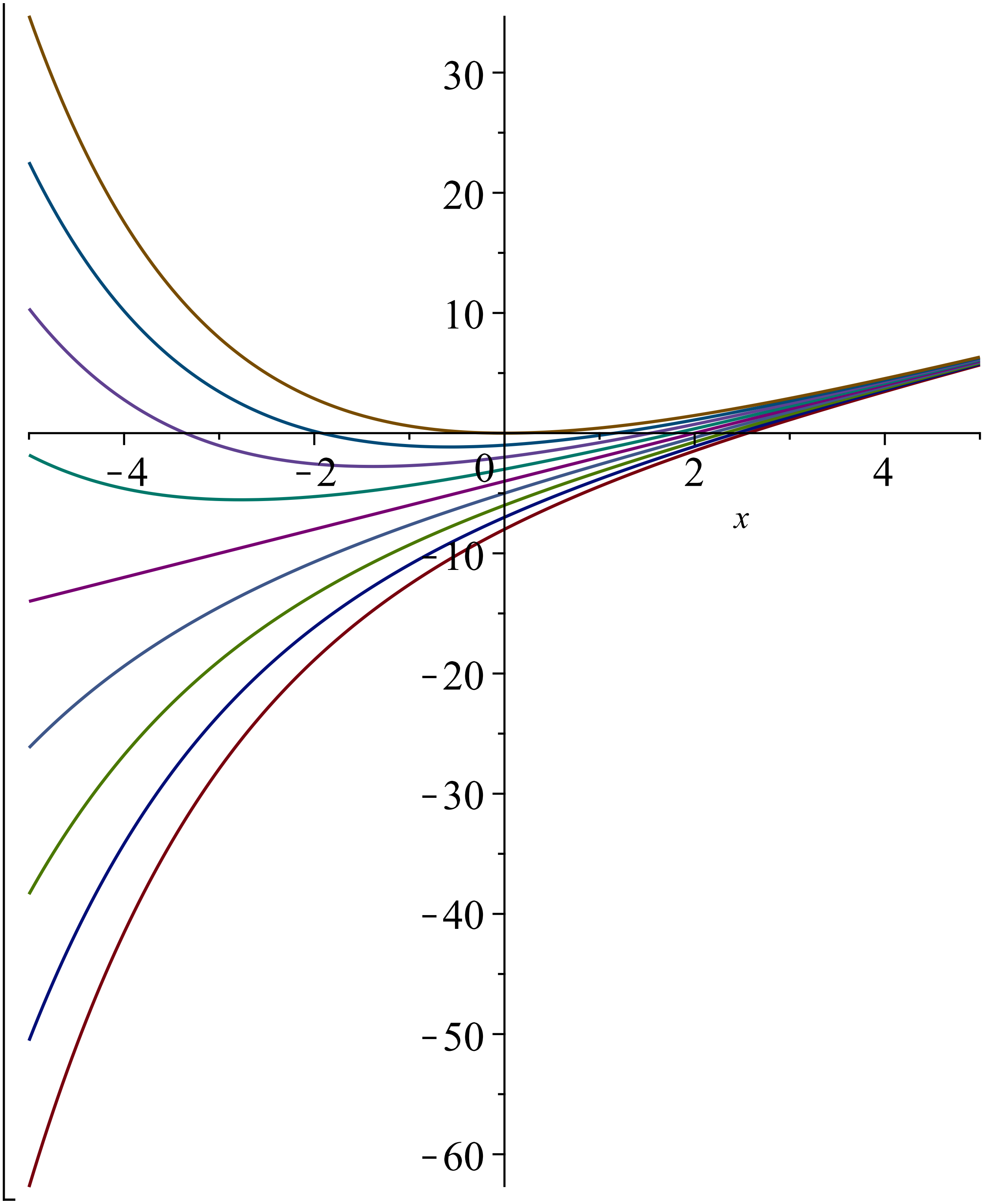
ou bien utilisant la commande `rhs` (= right hand side) :

$$> \; ysol1 := rhs(sol1)$$

$$ysol1 := 2\,x - 4 + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\_C1 \tag{4}$$

On peut à présent tracer plusieurs courbes solutions avec la commande `seq` (cette commande permet de définir une liste dans Maple) :

$$> \; plot([seq(ysol1, \_C1 = -4..4)], x = -5..5)$$

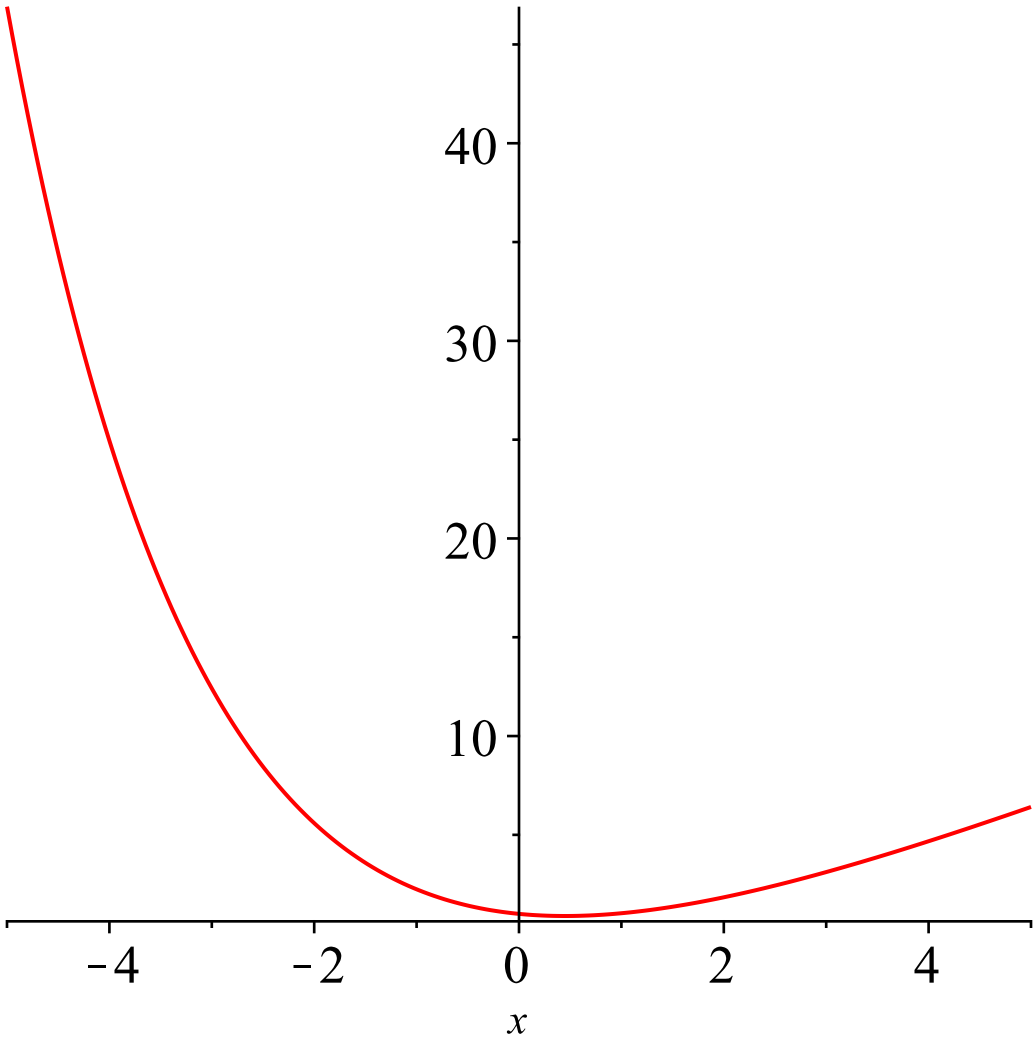


Chaque courbe correspond à une solution associé à une constante (on rappelle qu'il y en a une infinité). Si on veut l'unique solution associée à une condition initiale donnée (par exemple $y(0) = 1$), il faut la spécifier dans la commande `dsolve` :

> $sol := dsolve([eq1, y(0) = 1], y(x))$

$$sol := y(x) = 2x - 4 + 5\,e^{-\frac{x}{2}} \quad \textbf{(5)}$$

```
> plot([rhs(sol)], x=-5..5, color=[red])
```



Exercice 1.
Résoudre de la même façon les trois équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) - \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y(x) = \frac{1}{x} e^{x - \frac{2}{x}}$
b) $(x+1) y'(x) + (x-1) y(x) = 2x - 2$
c) $\left(1 - x^2\right) y''(x) - 3 x y'(x) + 8 y(x) = 0$

Pour la première, tracer plusieurs courbes de solutions sur $]0, 5]$. Quelle est leur limite en l'infini ? Pour la deuxième, tracer plusieurs courbes de solutions sur $[-4, 8]$. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur d'une solution et de sa première dérivée en -1 ? Pour la troisième, tracer plusieurs courbes de solutions sur $[1, 2]$. Décrire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$, puis calculer l'unique solution associée à la condition $y(0) = y'(0) = 1$.