TP2 Partie 1 - Fonctions de plusieurs variables

I - Gradient et matrice Hessienne

L'objectif de ce TP est de comprendre comment généraliser l'étude de fonctions à une variable réelle au cas des **fonctions de à plusieurs variables**. Une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est appelée **champ scalaire**, et ce sont ces fonctions qui nous intéresssent dans ce TP2. Dans le TP3, nous verrons également le cas plus général des **champs de vecteurs**, c'est à dire de fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

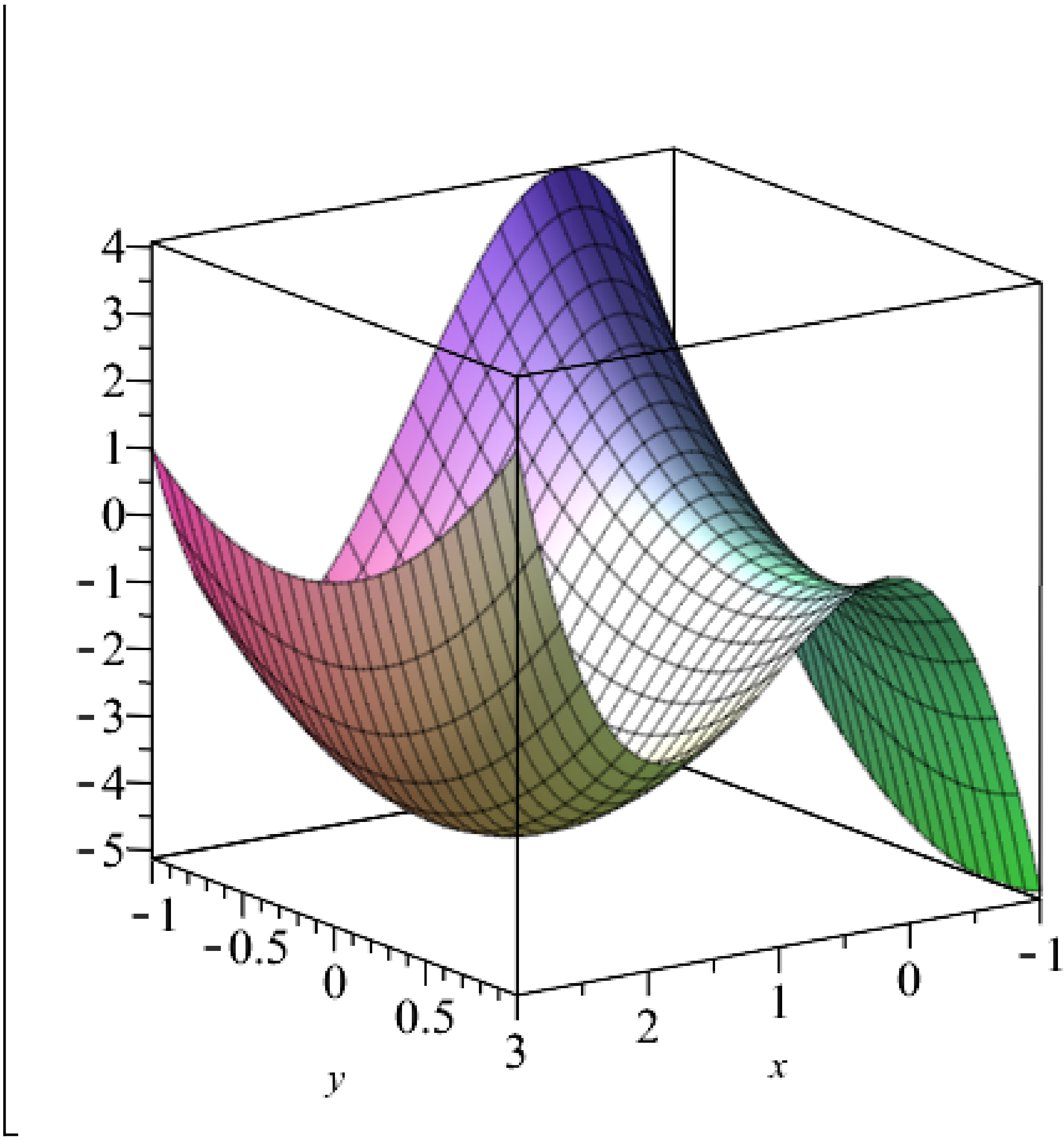
Dans tous les cas, on peut représenter de telles fonctions avec Maple. Par exemple, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface.

> $f := (x, y) \to x^3 + x \cdot y - 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,y$

$$f := (x, y) \mapsto x^3 + x\,y - 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,y \qquad \textbf{(1)}$$

On peut afficher une telle surface avec la commande **`plot3d.`** Il est également possible de régler les domaines des variables x et y.

> $plot3d([f(x, y)], x = -1..3, y = -1..1)$



Comme pour les fonctions d'une variable réelle, il est possible d'étudier les extrema de ces fonctions en passant par l'étude des dérivées partielles, du gradient et de la matrice Hessienne. Par exemple, la surface que l'on vient de tracer a l'air d'admettre un minimum mais aussi un **point selle** (car la surface a une allure de selle de cheval). Cela signifie que la fonction possède un extremum mais pour une seule des deux variables.

Méthode pour trouver les extrema d'une fonction à plusieurs variables

1) Etude du gradient : le vecteur des dérivées partielles

On appelle diff1 et diff2 respectivement la dérivée partielle par rapport à la première et la deuxième variable.

> $diff1 := (x, y) \rightarrow diff(f(x, y), x);\ diff2 := (x, y) \rightarrow diff(f(x, y), y)$

$$diff1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$diff2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad (2)$$

On peut également utiliser la notation $\frac{\partial}{\partial x} f$, ce qui revient à la même chose :

> $diff1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x, y);\ diff2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y);$

$$diff1 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$diff2 := (x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad (3)$$

Dans les deux cas, on récupère l'expression des dérivées partielles :

> $diff1(x, y);\ diff2(x, y)$

$$3\,x^2 - 6\,x + y$$

$$x + 4\,y - 2 \quad (4)$$

Exercice : vérifier que vous obtenez ces expressions en faisant le calcul à la main !

On peut maintenant définir le **gradient de *f***, c'est à dire le vecteur composé des dérivées partielles de f :

> $grad := (x, y) \rightarrow (3 \cdot x^2 - 6\,x + y, x + 4\,y - 2)$

$$grad := (x, y) \mapsto (3\,x^2 - 6\,x + y, x + 4\,y - 2) \quad (5)$$

Le **gradient joue le rôle de la dérivée de *f*.** Ainsi, pour chercher les extrema, on cherche à savoir quand est-ce que ce gradient s'annule, c'est à dire qu'on résout l'équation grad(x,y)=0, ce qui se traduit en Maple par :

> $solve(\{grad(x, y)[1] = 0, grad(x, y)[2] = 0\})$

$$\left\{x = \frac{1}{12}, y = \frac{23}{48}\right\}, \{x = 2, y = 0\} \quad (6)$$

Les crochets [1] et [2] servent à indiquer la coordonnées du vecteur gradient.

On trouve donc deux candidats : les points $\left(\frac{1}{12}, \frac{23}{48}\right)$ et $(2, 0)$. Ces points qui annulent le gradient sont appelés **points critiques.** En dimension 1, lorsqu'on trouve un point qui annule la dérivée, on est certain que notre fonction change de signe à cet endroit. En dimension supérieure, on ne peut pas conclure directement, car le point est soit un extremum, soit un point selle. Pour savoir lesquel des deux est le minimum et lequel est le point selle, on doit étudier la **matrice Hessienne**, c'est à dire la matrice des dérivées secondes.

2) Calcul de la matrice Hessienne : la matrice des dérivées seconde

La matrice Hessienne est une matrice carrée de taille 2x2 : elle contient les dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f$ sur la diagonale, et les dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} f$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} f$ sur l'anti-diagonale. En effet, une fois la première dérivée partielle calculée, on a deux choix : calculer cette dérivée par rapport à x ou par rapport à y, ce qui donne bien quatre dérivées seconde.

> $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$; $\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} f(x, y)$; $\frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} f(x, y)$; $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$;

$$6\,x - 6$$
$$1$$
$$1$$
$$4 \qquad \textbf{(7)}$$

On peut maintenant ranger ces informations dans notre matrice 2 x 2 :

> $hess := (x, y) \rightarrow Matrix(2, 2, [[6\,x - 6, 1], [1, 4]])$; $hess(x, y)$

$$hess := (x, y) \mapsto Matrix(2, 2, [[6\,x - 6, 1], [1, 4]])$$
$$\begin{bmatrix} 6\,x - 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

On peut remarquer que cette matrice est **symétrique,** c'est à dire que les éléments sur l'anti-diagonale sont les mêmes. C'est une prorpriété générale de la matrice Hessienne.

Exercice : vérifier que vous obtenez cette matrice en faisant les calculs à la main !

3) Etude de la matrice Hessienne en fonction des points critiques

L'intérêt de la matrice Hessienne est de déterminer si un point critique est un minimum, un maximum ou un point selle. Pour cela, on évalue la matrice en chacun des points critiques :

> $hess\left(\frac{1}{12}, \frac{23}{48}\right)$; $hess(2, 0)$;

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9)}$$

La règle est la suivante :

- **Si le déterminant de la matrice Hess(a,b) est négatif, alors (a,b) est un point selle.**

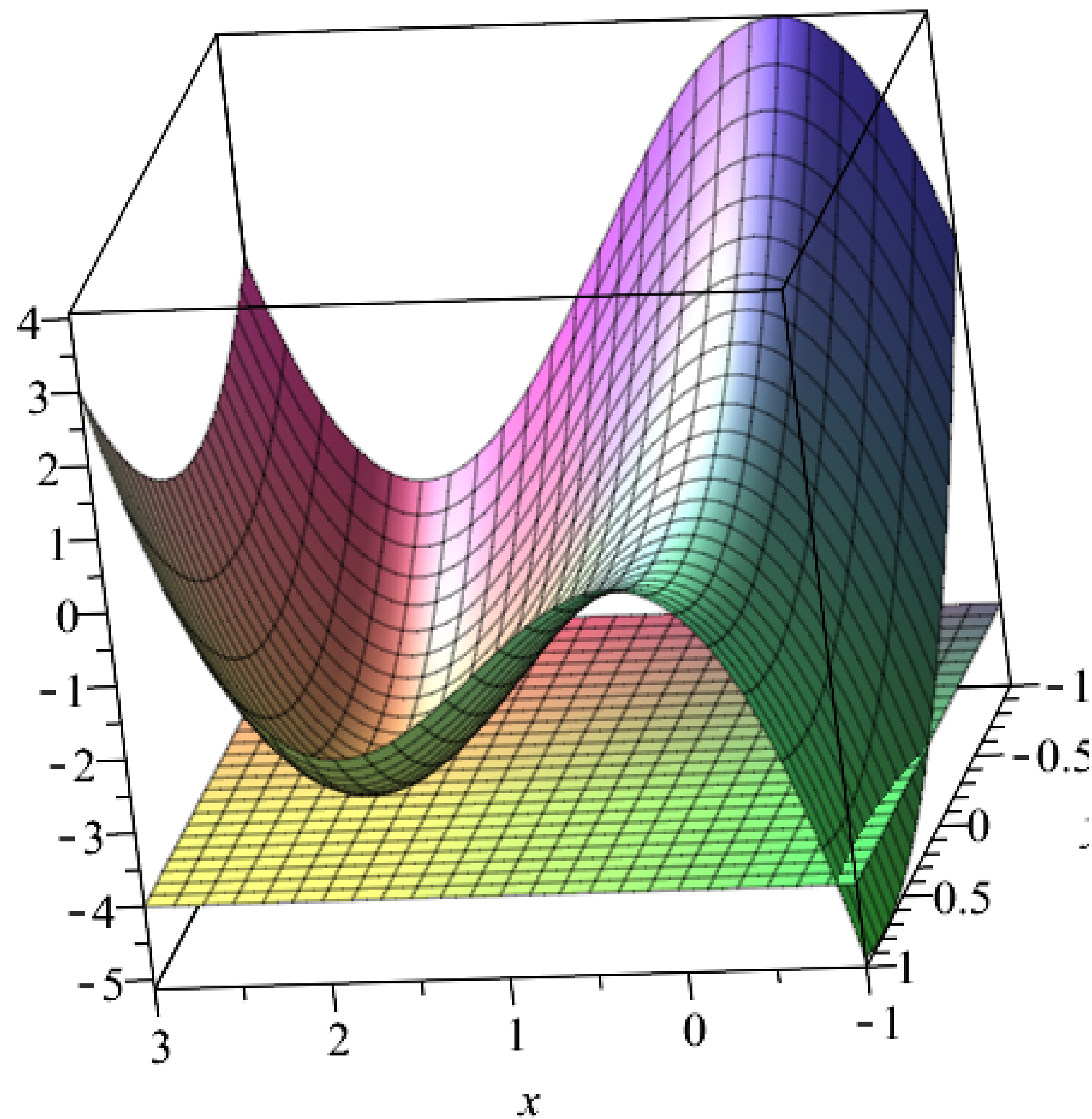
- **Si le déterminant de la matrice Hess(a,b) est positif et que sa trace est postive, alors (a,b) est un minimum.**
- **Si le déterminant de la matrice Hess(a,b) est positif et que sa trace est négative, alors (a,b) est un maximuum.**
- **Si le déterminant de la matrice Hess(a,b) est nul, on ne peut pas conclure.**

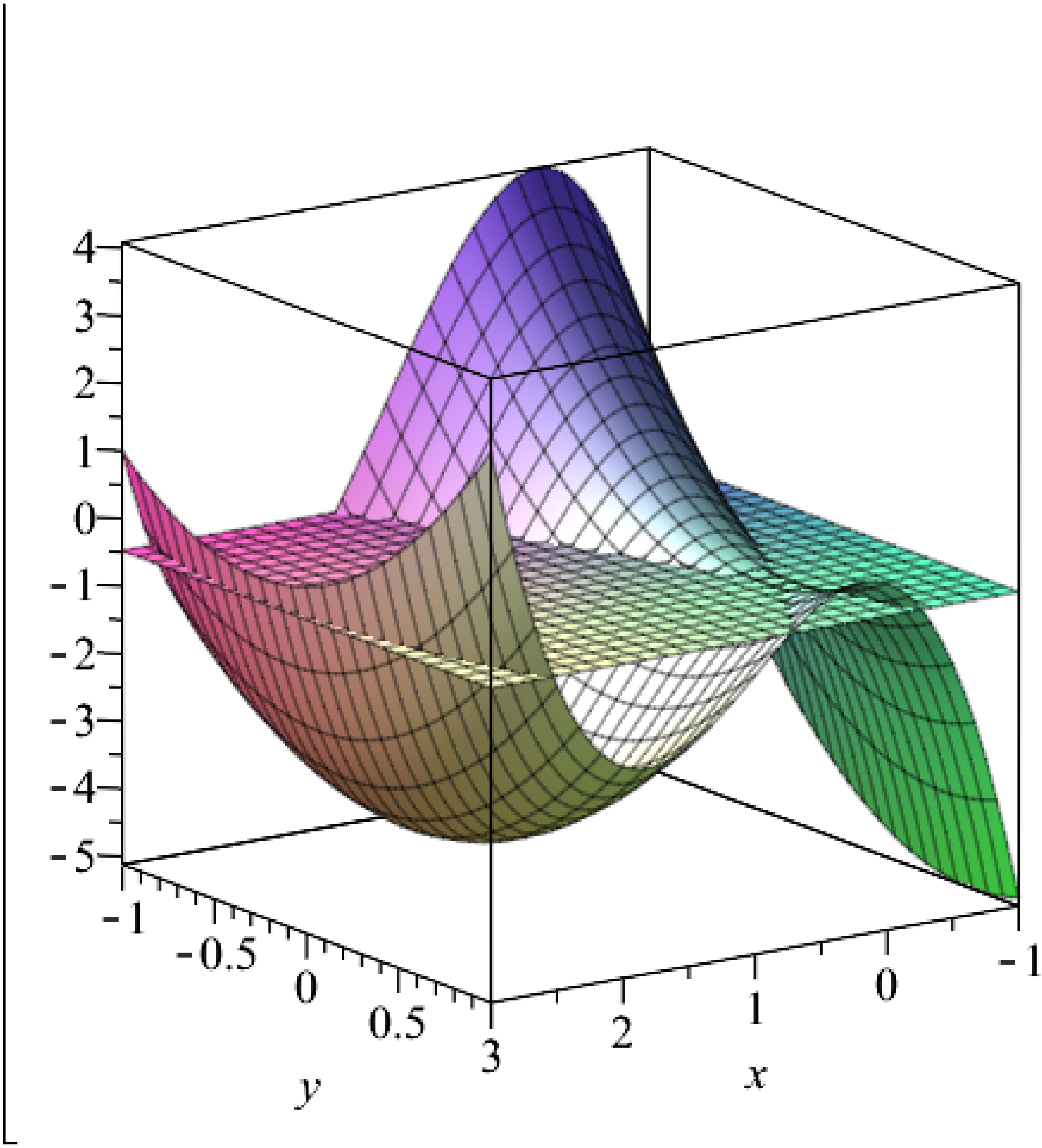
On rappelle que le déterminant d'une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est donné par le produit $ad - bc$ et que la trace est la somme des éléments diagonaux $a + d$.
Ainsi, dans le premier cas, le déterminant vaut $-\frac{11}{2} \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -21 < 0$, donc **le point** $\left(\mathbf{\frac{1}{12}}, \mathbf{\frac{23}{48}}\right)$ **est un point selle.** Dans le deuxième cas, le déterminant vaut $6 \cdot 4 - 1 = 23 > 0$, donc **le point** $(\mathbf{2, 0})$ **est un extremum**. De plus, la trace vaut $6 + 4 = 10 > 0$, donc **le point** $(\mathbf{2, 0})$ **est un minimum**.

4) Conclusion

On reprend notre fonction de départ $f(x, y) = x^3 + x \cdot y - 3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,y$. Cette fonction admet deux points critiques, dont un point selle et un minimum. On peut les afficher sur notre représentation en 3d :

> $plot3d([f(x, y), f(2, 0)], x = -1..3, y = -1..1); plot3d\left(\left[f(x, y), f\left(\frac{1}{12}, \frac{23}{48}\right)\right], x = -1..3, y = -1..1\right)$


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
3
2
1
0
-1
x
-1
-0.5
0
0.5
1



II - Application : étude de fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Déterminez les points critiques ainsi que leur nature pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$
2) $g(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 3y$
3) $h(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$
4) $i(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4y$
5) $j(x, y) = \frac{x}{x + y}$

Pour chaque fonction, vérifiez que vous obtenez les bonnes dérivées (premières et secondes) à la main, et représentez les surfaces correspondantes.

III - Laplacien d'un champ scalaire

Le laplacien généralise la notion de **dérivée seconde** pour une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dans des problèmes de physique, il permet donc de modélisation l'**accélération**. Physiquement, le laplcien mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. Une valeure importante du laplacien signifie que la valeur du champ scalaire est assez différente de la moyenne de son environnement.

On a donc des équations physique qui modélisent la vitesse d'évolution d'une grandeur physique en un point, qui sera d'autant plus grande (en un point) que le laplacien est important (en ce point). Par exemple, l'**équation de la chaleur** s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = c \cdot \Delta T(x, t)$, où $\Delta T(x, t)$ représente les dérivées secondes de la fonction température T, qui varie en fonction du temps t et de la position x. La vitesse de variation de la température en un point est d'autant plus grande que l'écart de température avec la moyenne de son entourage est important.

Le **laplacien** d'une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donné par la somme des dérivées secondes par rapport à chacune des composantes : $\Delta f(x1, ..., xn) = \frac{\partial^2 f}{\partial x1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial xn^2}$.

Exercice : déterminer le gradient et le laplacien pour chacun des champs scalaires suivants :

1) $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$
2) $f(x, y, z) = xyz \cdot \sin(xy)$